

## GLAVA 1

# METRIČKA I TOPOLOŠKA STRUKTURA PROSTORA $\mathbb{R}^n$

U tekstu sa  $\mathbb{R}$  označavamo uobičajeno skup realnih brojeva, dok sa  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  označavamo Dekartov proizvod od  $n$ -kopija skupa  $\mathbb{R}$ , tj.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Uređenu  $n$ -torku  $(x_1, \dots, x_n)$  označavaćemo jednim slovom  $x = (x_1, \dots, x_n)$  i nazivati tačkom skupa  $\mathbb{R}^n$ .

Kao što je poznato na skupu  $\mathbb{R}^n$  moguće je definisati unutrašnju operaciju sabiranja ("po koordinatama") elemenata iz  $\mathbb{R}^n$ , tj.

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Takođe, posmatrajući skup  $\mathbb{R}^n$  i vezano polje skalara  $\mathbb{R}$  definisana je spoljašnja operacija množenja skalara iz  $\mathbb{R}$  i elemenata skupa  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

na način

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Lako se provjerava da za ovako definisane operacije uređena četvorka  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$  čini vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Dakle, u skladu sa posljednjim određenjem skupa  $\mathbb{R}^n$  njegove elemente takođe tretiramo kao vektore, tj. elemente prethodno navedenog vektorskog prostora.

### 1. Metrički prostor

Prisjetimo se da svojstvo konvergencije niza realnih brojeva  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ka realnom broju  $a \in \mathbb{R}$  možemo kratko da zapišemo na način

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a - a_n| = 0.$$

Geometrijski interpretirano niz rastojanja tačaka  $a_n$  od tačke  $a$  teži nuli kada  $n \rightarrow \infty$ . Ispostavlja se da je pojam rastojanja ključni u definisanju konvergencije niza i kao takav biće osnov za uvođenje jedne uopštene klase prostora kod kojih će postojanje funkcije rastojanja ili metrike biti njihovo glavno određenje.

U narednoj definiciji navodimo aksiome metričkog prostora.

DEFINICIJA 1.1. Neka je  $X \neq \emptyset$  i  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:

- (1)  $d(x, y) \geq 0$  (*nenegativnost ili aksioma razdvajanja*);
- (2)  $d(x, y) = 0$  ako i samo ako je  $x = y$ ; (*aksioma koincidencije*);
- (3)  $d(x, y) = d(y, x)$  (*simetričnost*);
- (4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (*nejednakost trougla*),

gdje su  $x, y, z$  proizvoljni elementi skupa  $X$ . Tada se funkcija  $d$  naziva *metrikom* (ili *rastojanjem*) na skupu  $X$ . Uređen par  $(X, d)$  se naziva *metričkim prostorom*.

Primijetimo da u samoj Definiciji 1.1 na skupu  $X$  nije pretpostavljeno postojanje određene strukture. Njegove elementa i dalje tretiramo kao tačke za koje smo sada u prilici da odredimo odgovarajuće rastojanje. Takođe na istom skupu moguće je definisati više metrika.

Same aksiome metrike (1) – (4) iz prethodne definicije odgovaraju našoj geometrijskoj intuiciji, u smislu da je rastojanje između bilo koje dvije različite tačke pozitivno kao i da rastojanje između tačaka  $x$  i  $y$  nije veće nego suma rastojanja između tačaka  $x$  i  $z$  i rastojanja između tačaka  $z$  i  $y$ .

Uslov (1) je moguće izvesti iz uslova (2), (3) i (4). Zaista,

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, x) = 0,$$

odakle dobijamo da je  $d(x, y) \geq 0$  za proizvoljne elemente metričkog prostora  $X$ .

Prije nego pređemo na primjere metričkih prostora izvedimo jednu važnu nejednakost za metriku. Ukoliko je  $(X, d)$  metrički prostor, tada važi sljedeća nejednakost

$$(1.1) \quad |d(z, x) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

Naime, uslovi (4) i (3) povlače  $d(z, x) \leq d(z, y) + d(x, y)$ , tj.

$$d(z, x) - d(z, y) \leq d(x, y).$$

Slično,  $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y)$ , tj.  $d(z, y) - d(z, x) \leq d(x, y)$ , odnosno

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq \max\{d(z, x) - d(z, y), d(z, y) - d(z, x)\} \\ &= |d(z, x) - d(z, y)|. \end{aligned}$$

PRIMJER 1.2. Osnovni primjer, poznat iz prethodnog kursa analize, jeste metrički prostor  $(\mathbb{R}, d)$ , gdje je metrika  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definisana sa  $d(x, y) = |x - y|$ .

Da je funkcija  $d$  zaista metrika pokazujemo jednostavno. Nejednakost trougla dokazujemo koristeći istoimeno svojstvo za funkciju apsolutne vrijednosti,

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

PRIMJER 1.3. Na proizvoljnom skupu  $X \neq \emptyset$  možemo da definišemo tzv. diskretnu metriku

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Lako se provjerava da je  $(X, d)$  metrički prostor. Na primjer, u cilju da pokažemo nejednakost trougla

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

primijetimo da lijeva strana posljednje nejednakosti može da uzima vrijednosti 0 ili 1, dok za desnu stranu nejednakosti potencijalne vrijednosti su 0, 1 ili 2. Dakle, nejednakost trougla nije tačna samo u slučaju da je  $d(x, y) = 1$ , tj.  $x \neq y$  i  $d(x, z) + d(z, y) = 0$ , tj.  $x = z$  i  $y = z$  što je nemoguće.

PRIMJER 1.4. (**Euklidska metrika na  $\mathbb{R}^n$** ) Na skupu  $\mathbb{R}^n$  definišemo metriku funkcijom

$$(1.2) \quad d_2(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2},$$

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ , koja specijalno za  $n = 1$  daje metriku iz Primjera 1.2.

Nije teško provjeriti da važe svojstva (1), (2) i (3) iz Definicije 1.1. U svrhu dokazivanja nejednakosti trougla za funkciju  $d_2$  koristimo specijalan slučaj nejednakosti Minkovskog,

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n |z_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Za slučaj da je  $n = 2$  i  $n = 3$  formulom je dato upravo najkraće rastojanje između tačaka  $x$  i  $y$  u ravni i prostoru  $\mathbb{R}^3$ , tj. euklidsko rastojanje.

Da bismo upotpunili gornja izvođenja, dokažimo specijalan slučaj nejednakosti Minkovskog polazeći od jednostavne nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, a, b \geq 0.$$

Stavljajući da je  $a = \frac{|a_i|}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}}$  i  $b = \frac{|b_i|}{(\sum_{i=1}^n b_i^2)^{1/2}}$  i zatim sumirajući novodobijene nejednakosti za  $i = 1, \dots, n$  dobijamo

$$\frac{\sum_{i=1}^n |a_i| |b_i|}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^n b_i^2)^{1/2}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

tj. dolazimo do Koši-Švarcove nejednakosti

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| |b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Sada specijalno imamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n |a_i| |b_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right)^2, \end{aligned}$$

tj.

$$\left( \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

PRIMJER 1.5. Na skupu  $\mathbb{R}^n$  sljedeće funkcije

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

čine metrike (provjeriti).

Ukoliko je  $(X, d)$  metrički prostor i  $A \subset X$ , tada sam skup  $A$  možemo sa restrikcijom metrike  $d$  na njemu da tretiramo kao metrički prostor za sebe, tj. rekli bismo da je  $(A, d)$  metrički potprostor prostora  $(X, d)$ .

U narednim definicijama uvodimo određene pojmove koje je moguće definisati u proizvoljnom metričkom prostoru poput dijametra skupa, ograničenog skupa i rastojanja između skupova.

DEFINICIJA 1.6. Neka je  $(X, d)$  metrički prostor i  $A \subset X$ , tada dijametar skupa  $A$ , u oznaci  $\text{diam}(A)$  je definisan

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

DEFINICIJA 1.7. Neka je  $(X, d)$  metrički prostor za skup  $A \subseteq X$  kažemo da je ograničen ako je  $\text{diam}(A) < \infty$ .

PRIMJER 1.8. Neka je  $A = \{(x, y) | (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$  disk ili krug sa centrom u tački  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  i poluprečnika  $r > 0$ , tada je jasno  $\text{diam}(A) = 2r$  uzimajući u obzir metrički prostor  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .

PRIMJER 1.9. Neka je  $I_{a,b} = \{(x, y, z) | a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$ , gdje su  $a = (a_1, a_2, a_3)$  i  $b = (b_1, b_2, b_3)$  fiksirane tačke iz  $\mathbb{R}^3$  ( $a_i < b_i, i \in \{1, 2, 3\}$ ). Skup  $I_{a,b}$  predstavlja pravougli paralelopiped i traženi dijametar jednak je upravo dužini velike dijagonale koja spaja tačke  $a$  i  $b$ . Dakle,

$$\text{diam}(I_{a,b}) = ((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2)^{1/2}.$$

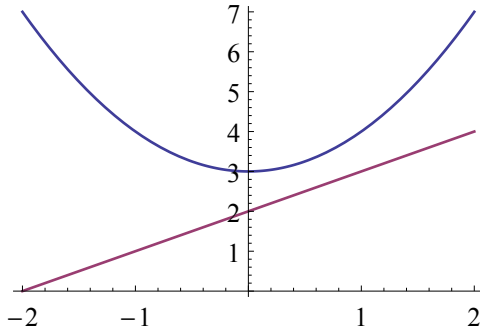
DEFINICIJA 1.10. Neka je  $(X, d)$  metrički prostor i  $A \subset X$  i  $B \subset X$ , tada rastojanje između skupova  $A$  i  $B$  u metričkom prostoru  $X$  je dato sa

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

U manje preciznoj formi rekli bismo da je rastojanje između dva skupa najkraće rastojanje između tih skupova. Jasno da ako za skupove  $A$  i  $B$  iz prethodne definicije važi  $A \cap B \neq \emptyset$ , onda je  $d(A, B) = 0$ .

PRIMJER 1.11. Odredimo rastojanje između prave  $y = x + 2$  i grafika funkcije  $y = x^2 + 3$ . Tražimo  $d(A, B)$ , gdje je  $A = \{(x, y) | y = x + 2, x \in \mathbb{R}\}$  i  $B = \{(x, y) | y = x^2 + 3, x \in \mathbb{R}\}$  (slika).

Traženo rastojanje možemo da odredimo koristeći formulu za rastojanje tačke od prave. Preciznije, od svih tačaka skupa  $B$  tražimo onu za koju funkcija  $\varphi(x) = \frac{|x^2 - x + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$ , ima najmanju vrijednost za  $x \in \mathbb{R}$ . Budući da je  $x^2 - x + 1 \geq 0, x \in \mathbb{R}$ , lako se dobija da se odgovarajući minimum dostiže u tački  $x = \frac{1}{2}$  i zato je  $d(A, B) = \frac{3}{4\sqrt{2}}$ .



PRIMJER 1.12. Na skupu neprekidnih funkcija na segmentu  $[a, b]$ ,  $C([a, b])$  definišemo  $d_\infty(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$ , za  $f, g \in C([a, b])$ .

Funkcija  $d_\infty : C([a, b]) \times C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  je dobro definisana. Naime, kako je za proizvoljne  $f, g \in C([a, b])$  funkcija  $\varphi(t) = |f(t) - g(t)|$  takođe neprekidna, to ona dostiže maksimum na segmentu  $[a, b]$ .

Iz načina na koji je definisana funkcija  $d_\infty$  jasno da je  $d(f, g) \geq 0$  i  $d_\infty(f, g) = d(g, f)$ . Sa druge strane, ako je  $d_\infty(f, g) = 0$ , to povlači da je maksimum nenegativne funkcije  $\varphi(t) = |f(t) - g(t)|$  nula na segmentu  $[a, b]$ , pa je  $\varphi(t) = 0, t \in [a, b]$ , tj.  $f(t) = g(t), t \in [a, b]$ . Na kraju, nejednakost trougla dokazujemo iz činjenice da

$$(1.3) \quad |f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|, t \in [a, b],$$

gdje je  $h \in C([a, b])$ . Uzumajući maksimum obje strane nejednakosti u (1.3) dobijamo

$$\begin{aligned} d_\infty(f, g) &= \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} (|f(t) - g(t)| + |h(t) - g(t)|) \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} (|f(t) - g(t)|) + \max_{a \leq t \leq b} (|h(t) - g(t)|) \\ &= d_\infty(f, g) + d_\infty(h, g). \end{aligned}$$

**1.1. Normirani prostori.** Pojam normiranog prostora je već poznat iz kursa Linearne algebre i za razliku od metričkog prostora na skupu gdje definišemo normu pretpostavljamo postojanje određene algebarske strukture, tj. strukturu vektorskog prostora. U nastavku pokazujemo da je svaki normiran prostor metrički prostor i prethodno navedene primjere metričkih prostora razmatramo kroz prizmu uvedene definicije normiranog prostora.

**DEFINICIJA 1.13.** Neka je  $X$  vektorski prostor nad poljem realnih brojeva  $\mathbb{R}$ . Funkcija  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  koja zadovoljava sljedeća svojstva:

- (1)  $\|x\| \geq 0$ ;
- (2)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- (3)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (4)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , za  $x, y \in X$ ,

naziva se *normom* na prostoru  $X$ . Uređen par  $(X, \|\cdot\|)$  naziva se *normiranim prostorom*.

**TEOREMA 1.14.** *Svaki normiran prostor  $X$  je metrički prostor.*

**DOKAZ.** Neka je  $(X, \|\cdot\|)$  dati normirani prostor. Definišimo funkciju  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  na način  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Lako se utvrđuje da funkcija  $d$  zadovoljava sve uslove metrike iz Definicije 1.1. Primjera radi, za nejednakost trougla imamo

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y),$$

gdje  $x, y, z \in X$ . □

**KOMENTAR 1.15.** Za metriku  $d(x, y) = \|x - y\|$  normiranog prostora  $(X, \|\cdot\|)$  kažemo da je indukovana (generisana) normom  $\|\cdot\|$ . Na taj način, svaki normiran prostor možemo da tretiramo istovremeno i kao odgovarajući metrički prostor gdje je metrika indukovana normom polazećeg normiranog prostora.

**PRIMJER 1.16.** Apsolutna vrijednost  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je primjer norme na vektorskom prostoru  $\mathbb{R}$ , gdje se  $\mathbb{R}$  posmatra kao vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ . Prema tome,  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  predstavlja normiran prostora. Jasno da metrika definisana na  $\mathbb{R}$  iz Primjera 1.2 je indukovana normom  $|\cdot|$ .

PRIMJER 1.17. (**Euklidski prostor**  $\mathbb{R}^n$ ) Na skupu  $\mathbb{R}^n$  funkcijom  $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  zadana je norma. Posljednje tvrđenje se lako dokazuje imajući u vidu da je na primjer nejednakost trougla specijalan slučaj nejednakosti Minkovskog dokazanoj u Primjeru 1.4. Takođe, euklidska metrika  $d_2$  iz istog primjera je generisana upravo definisanom normom.

Uzimajući u obzir da je sada  $\|x\| = d_2(0, x)$ , nejednakost (1.1) postaje

$$(1.4) \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

PRIMJER 1.18. Na prostoru  $\mathbb{R}^n$  sa

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, x \in \mathbb{R}^n,$$

definisane su odgovarajuće norme. Primijetimo da su metrike  $d_1, d_\infty$  iz Primjera 1.5 indukovane normama  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$  respektivno.

DEFINICIJA 1.19. Neka je  $X$  vektorski prostor. Za norme  $\|\cdot\|_1$  i  $\|\cdot\|_2$  definisane na  $X$  kažemo da su ravnomjerno ekvivalentne ako postoje pozitivne konstante  $C_1$  i  $C_2$  takve da važi

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|, x \in X.$$

U terminima definisanih normi  $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$  i  $\|\cdot\|_\infty$  na  $\mathbb{R}^n$  važe sljedeće nejednakosti:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \|x\|_1, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq n\|x\|_\infty, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, x \in \mathbb{R}^n \text{ (provjeriti)}.$$

Iz gore navedenih nejednakosti zaključujemo da su norme  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$  i  $\|\cdot\|$  ravnomjerno ekvivalentne u parovima na  $\mathbb{R}^n$ .

PRIMJER 1.20. Na prostoru  $C([a, b])$  neprekidnih funkcija na segmentu  $[a, b]$  sa

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|, f \in C([a, b])$$

definisana je norma na  $C([a, b])$ , tj.  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  je normiran prostor i metrika  $d_\infty$  iz Primjera 1.11 je generisana normom  $\|\cdot\|_\infty$ .

PRIMJER 1.21. Na prostoru  $C([a, b])$  definišemo funkciju  $\|\cdot\|_1$  na način

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, f \in C([a, b]).$$

Funkcija  $\|\cdot\|_1$  je dobro definisana na prostoru neprekidnih funkcija  $C([a, b])$  budući da je svaka neprekidna funkcija na segmentu takođe i Riman integrabilna.

Nije teško provjeriti da funkcija  $\|\cdot\|_1$  zadovoljava uslove (1), (3) i (4).

Sa druge strane, ako je  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt = 0$ , onda budući da je  $f$  neprekidna funkcija na segmentu  $[a, b]$ , to je  $f(t) = 0$ ,  $t \in [a, b]$ . U protivnom, ako je  $\|f\|_1 = 0$  i  $f(t_0) \neq 0$  za neko  $t_0 \in [a, b]$ , to postoji interval  $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$  takav da je  $|f(t)| > 0$ ,  $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \cap [a, b]$  i zato je

$$\|f\|_1 > \frac{\epsilon}{2} \min_{t \in [t_0 - \frac{\epsilon}{2}, t_0 + \frac{\epsilon}{2}] \cap [a, b]} |f(t)| > 0,$$

što je kontradikcija. Prema tome,  $\|\cdot\|_1$  je takođe primjer norme na prostoru  $C([a, b])$ . Dodatno, odgovarajuća metrika na prostoru  $C([a, b])$  indukovana normom  $\|\cdot\|_1$  data je formulom

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt, f, g \in C([a, b]).$$

PRIMJER 1.22. Označimo sa  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  skup svih linearnih preslikavanja iz prostora  $\mathbb{R}^n$  u  $\mathbb{R}^m$ , tj. skup svih preslikavanja koja zadovoljavaju  $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$\Lambda(x + y) = \Lambda(x) + \Lambda(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Lambda(\lambda x) = \lambda \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Na skupu  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  standardno definišemo sabiranje i množenje skalarom,

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)(x) = \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x), \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(\lambda \Lambda)(x) = \lambda \Lambda(x), \Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sa gore navedenim operacijama uređena četvorka  $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \mathbb{R}, +, \cdot)$  čini vektorski prostor. Ulogu nultog elementa igra nulto preslikavanje  $\Lambda(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Dalje, neka je

$$(1.5) \quad \|\Lambda\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Lambda(x)\|}{\|x\|}, \quad \Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Na nivou oznaka primijetimo da je u brojiocu razlomka u (1.5) euklidska norma vektora  $\Lambda x$  u  $\mathbb{R}^m$ , a u imeniocu euklidska norma vektora  $x$  u  $\mathbb{R}^n$ . Takođe, zbog linearnosti preslikavanja  $\Lambda$  za proizvoljno  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|\Lambda(\alpha x)\|}{\|\alpha x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Lambda(x)\|}{\|x\|}$$

i dodatno je

$$\|\Lambda\| = \sup_{x \neq 0} \left\| \Lambda \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Lambda(x)\|.$$

Iz (1.5) vidimo da ako je  $\|\Lambda\| < \infty$ , onda je

$$(1.6) \quad \|\Lambda(x)\| \leq \|\Lambda\| \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Za linearna preslikavanja iz skupa  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  za koje je  $\|\Lambda\| < \infty$  kažemo da su ograničena linearna preslikavanja.

Funkcija  $\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Lambda \rightarrow \|\Lambda\|$ ) je norma na prostoru  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

Na primjer provjerimo svojstvo (2) iz Definicije 1.27. Ako je  $\|\Lambda\| = 0$ , onda je  $\sup_{\|x\|=1} \|\Lambda(x)\| = 0$ , tj.  $\Lambda(x) = 0, \|x\| = 1$ , što dalje ima za posljedicu da  $\Lambda(x) = \|x\| \Lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$  kad god je  $x \neq 0$ , tj.  $\Lambda(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n$ .

Dalje, u cilju da ustanovimo validnost svojstva (4) pretpostavimo da su  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  i  $\|\Lambda_1\| < \infty$  i  $\|\Lambda_2\| < \infty$ . U protivnom, ako je  $\|\Lambda_1\| = \infty$  ili  $\|\Lambda_2\| = \infty$ , onda je (4) trivijalno. Za  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  i  $\|x\| = 1$ , imamo

$$\|\Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)\| \leq \|\Lambda_1(x)\| + \|\Lambda_2(x)\|.$$

Uzimajući supremum po skupu  $\{x | \|x\| = 1\}$  lijeve i desne strane gornje nejednakosti dolazimo do

$$\|\Lambda_1 + \Lambda_2\| \leq \|\Lambda_1\| + \|\Lambda_2\|.$$

Ako su  $\Lambda_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  i  $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$  ( $m, n, p \in \mathbb{N}$ ) ograničena linearna preslikavanja, onda je i kompozicija ovih preslikavanja  $\Lambda_2 \circ \Lambda_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  takođe ograničeno linearno preslikavanje.

Posljednji tvrđenje lako dokazujemo iz sledećeg niza relacija

$$\|(\Lambda_2 \circ \Lambda_1)(x)\| = \|\Lambda_2(\Lambda_1(x))\| \leq \|\Lambda_2\| \|\Lambda_1(x)\| \leq \|\Lambda_2\| \|\Lambda_1\| \|x\|,$$

$$\text{tj. } \|\Lambda_2 \circ \Lambda_1\| \leq \|\Lambda_2\| \|\Lambda_1\|.$$

**PRIMJER 1.23.** Sa  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, \dots, \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R})$  označavamo skup svih polilinearnih preslikavanja  $P : \mathbb{R}^{k_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{k_n} \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  su prirodni brojevi. Podsjetimo se da za preslikavanje kažemo da je polilinearno ako je linearno po svakom argumentu. Specijalno za  $n = 2$  govorimo o bilinearnim preslikavanjima.

Skup  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, \dots, \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R})$  sa standardnim operacijama sabiranja funkcija i množenja skalarom čini vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Za proizvoljno  $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, \dots, \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R})$  funkcija

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, \dots, \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

definisana na način

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \|P\| &= \sup_{x_i \neq 0, 1 \leq i \leq n} \frac{|P(x_1, \dots, x_n)|}{\|x_1\|_1 \cdots \|x_n\|_n} \\ &= \sup_{\|x_i\|_i = 1, 1 \leq i \leq n} |P(x_1, \dots, x_n)| \end{aligned}$$

je norma na  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, \dots, \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R})$ , gdje sa  $\|\cdot\|_i$  označavamo euklidsku normu na prostoru  $\mathbb{R}^{n_i}$ .

Ukoliko je  $\|P\| < \infty$ , za polilinearno preslikavanje  $P$  kažemo da je ograničeno.

**NAPOMENA 1.24.** Polilinearno preslikavanje  $P : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  definisano je u opštem na Dekartovom proizvodu  $X_1 \times \dots \times X_n$  vektorskih prostora  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nad istim poljem, koji preslikava u vektorski prostor  $Y$ .

**1.2. Euklidov prostor.** Slično kao u prethodnom izlaganju pretpostavljamo da je  $X$  realan vektorski prostor, iako sama definicija normiranog prostora (kao i Euklidovog prostora) daje se i za slučaj vektorskog prostora nad poljem kompleksnih brojeva.

**DEFINICIJA 1.25.** Euklidov prostor  $X$  je vektorski prostor na kome je definisano preslikavanje  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljava sljedeće uslove

- (1)  $\langle x, x \rangle \geq 0, x \in X$ ;
- (2)  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- (3)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, x, y \in X$ ;
- (4)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in X$ ;
- (5)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, x, y, z \in X$ .

Funkciju  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nazivamo *skalarnim proizvodom* na  $X$ .

Uočimo da u Definiciji 1.25 nije pretpostavljeno da je vektorski prostor  $X$  konačno dimenzionalan. Slično kao i za normirane prostore, moguće je definisati više skalarnih proizvoda na istom vektorskom prostoru.

Prethodno dokazana Koši-Švarcova nejednakost u kontekstu prostora  $\mathbb{R}^n$  važi u opštijoj situaciji. Preciznije, za proizvoljne vektore  $x, y$  iz Euklidovog prostora  $X$  važi nejednakost

$$(1.8) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

**PRIMJER 1.26.** Kanonski primjer Euklidovog prostora je prostor  $\mathbb{R}^n$  sa skalarnim proizvodom definisanim na način

$$(1.9) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**TEOREMA 1.27.** *Svaki Euklidov prostor  $X$  je normiran prostor.*

**DOKAZ.** Potrebno je da ustanovimo da je funkcijom  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ,  $x \in X$  definisana norma na  $X$ . Dokažimo da važi nejednakost trougla, važenje ostalih svojstava norme se lako utvrđuje. Polazeći od Koši-Švarcove nejednakosti (1.8) imamo

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

tj.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . □

Dakle, novi aspekt posmatranja (ujedno i opravdanje termina "euklidski prostor  $\mathbb{R}^n$ ") prostora  $\mathbb{R}^n$  jeste da je to normiran prostor gdje je norma

$$(1.10) \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

indukovana skalarnim proizvodom (1.9).

Euklidov prostor  $\mathbb{R}^n$  sa skalarnim proizvodom (1.9) koji indukuje odgovarajuću euklidsku normu (1.10) (metriku  $d_2$ ) predstavlja osnovno polje rada u daljem izlaganju. U tom smislu, često u određenim situacijama nećemo praviti razliku između norme (1.10) i metrike  $d_2$  **koju ćemo nadalje da označavamo sa  $d$** .

Na kraju ovog poglavlja navodimo primjer skalarnog proizvoda na beskonačno dimenzionalnom prostoru  $C([a, b])$ .

PRIMJER 1.28. Formulom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad f, g \in C([a, b])$$

definisan je skalarni proizvod na  $C([a, b])$  što se lako provjerava.

Polazeći od Teoreme 1.27 imamo da je na  $C([a, b])$  norma indukovana gore definisanim skalarnim proizvodom data formulom

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad f \in C([a, b]),$$

a metrika

$$\tilde{d}_2(f, g) = \left( \int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad f, g \in C([a, b]).$$

Koši-Švarcova nejednakost za  $f, g \in C([a, b])$  poprima sljedeći oblik

$$(1.11) \quad \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

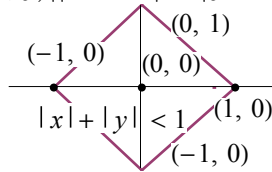
U narednoj definiciji u prostoru  $\mathbb{R}^n$  u kontekstu euklidske metrike  $d$  definišemo neke standardne geometrijske objekte (otvorena lopta, zatvorena lopta, sfera).

**DEFINICIJA 1.29. (Lopta i sfera u  $\mathbb{R}^n$ )** Neka je  $a \in \mathbb{R}^n$  i  $r > 0$  realan broj. Skupovi  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a, x) < r\}$ ,  $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a, x) \leq r\}$  i  $S^{n-1}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a, x) = r\}$  nazivaju se redom *otvorenom loptom*, *zatvorenom loptom* i *sferom* sa centrom u  $a$  i poluprečnika  $r$ .

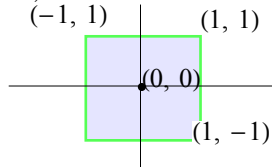
**KOMENTAR 1.30.** Svaki od pomenutih skupova može biti definisan u proizvoljnom metričkom prostoru.

Primijetimo da za  $n = 2$  otvorena lopta  $B(a, r)$  ( $S^1(a, r)$ ) iz prethodne definiciji jeste zapravo krug (kružnica) sa centrom u tački  $a$  i poluprečnika  $r > 0$ , dok za  $n = 3$  radi se upravo o lopti (sferi) sa centrom u tački  $a$  poluprečnika  $r$  (slika). Specijalno za  $n = 1$ ,  $B(a, r) = (a - r, a + r)$ ,  $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$ , a  $S^0 = \{a - r, a + r\}$ .

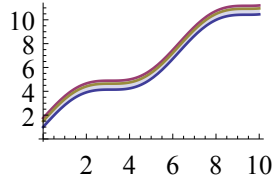
Sam naziv otvorena lopta i njegova korespondencija sa našom geometrijskom intuicijom je uslovan. Na primjer, za  $n = 2$  posmatramo odgovarajuće otvorene lopte  $B(a, r)$  u slučaju da tretiramo metrike  $d_1$  i  $d_\infty$ , koje su sada definisane na sljedeći način respektivno  $B(a, r) = \{(x, y) | |x - a_1| + |y - a_2| < r\}$  (slika za  $a = 0$  i  $r = 1$ )



i  $B(a, r) = \{(x, y) | \max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} < r\}$  (slika za  $a = 0$  i  $r = 1$ ).



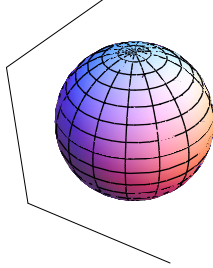
U slučaju da razmatramo prostor  $C([a, b])$  i metriku  $d_\infty$  iz Primjera 1.12. za  $f \in C([a, b])$  odgovarajuća otvorena lopta je definisana sada na način  $B(f, r) = \{g \in C([a, b]) | \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| < r\}$ . Primijetimo da se grafici funkcija  $g \in B(f, r)$  nalaze u traci "širine"  $2r$  grafika funkcije  $f$  (slika ispod).



### 1.3. Topološka struktura prostora $\mathbb{R}^n$ .

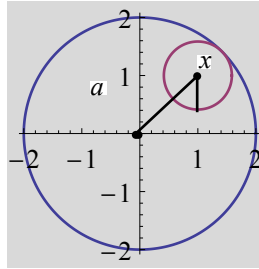
**DEFINICIJA 1.31.** Za skup  $G \subset \mathbb{R}^n$  kažemo da je *otvoren* ako za svako  $x \in G$  postoji  $\delta > 0$  tako da je lopta  $B(x, r) \subset G$ .

DEFINICIJA 1.32. Okolina tačke  $x \in \mathbb{R}^n$  je bilo koji otvoren skup  $G$  koji sadrži tačku  $x$ . Okolina skupa  $A \subset \mathbb{R}^n$  je bilo koji otvoren skup  $G$  u  $\mathbb{R}^n$  takav da je  $A \subset G$ .



PRIMJER 1.33. Otvorena lopta  $B(a, r)$  je otvoren skup u  $\mathbb{R}^n$ . Prema Definiciji 1.31 potrebno je za proizvoljnu tačku  $x \in B(a, r)$  pokazati da postoji  $\delta > 0$  tako da  $B(x, \delta) \subset B(a, r)$ . Za  $\delta = r - d(x, a)$  (slika) dokazujemo da je  $B(x, \delta) \subset B(a, r)$ . Zaista, za proizvoljno  $y \in B(x, \delta)$  imamo zbog svojstva nejednakosti trougla metrike  $d$  da važi

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \delta = r,$$



tj.  $B(x, \delta) \subset B(a, r)$ .

PRIMJER 1.34. Skup  $B^c(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a, x) > r\}$  je otvoren u  $\mathbb{R}^n$ . Neka je  $x \in B^c(a, r)$ . Pokažimo da je  $B(x, \delta) \subset B^c(a, r)$ , gdje je  $\delta = d(x, a) - r$ . Za  $y \in B(x, \delta)$  prema nejednakosti (1.1) imamo da je

$$d(a, y) \geq |d(x, a) - d(x, y)| > d(x, a) - \delta = r,$$

tj.  $B(x, \delta) \subset B^c(a, r)$ .

TEOREMA 1.35. a) Skup  $\mathbb{R}^n$  i prazan skup  $\emptyset$  su otvoreni skupovi u  $\mathbb{R}^n$ .

b) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova u  $\mathbb{R}^n$  je otvoren skup u  $\mathbb{R}^n$ .

c) Presjek konačno mnogo otvorenih skupova u  $\mathbb{R}^n$  je otvoren skup u  $\mathbb{R}^n$ .

DOKAZ. a) Da je skup  $\mathbb{R}^n$  je otvoren nije teško provjeriti. Sa druge strane, prazan skup  $\emptyset$  uzimamo po definiciji da je otvoren skup u  $\mathbb{R}^n$ . b) Neka je  $\{G_\alpha | \alpha \in I\}$  familija otvorenih skupova u  $\mathbb{R}^n$ , gdje je  $I$  neki skup indeksa. Označimo sa  $G = \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$  i neka je  $x \in G$ . Tada po definiciji unije skupova postoji neki indeks  $\alpha_0 \in I$  takav da  $x \in G_{\alpha_0}$ . Kako je po pretpostavci skup  $G_{\alpha_0}$  otvoren to postoji  $r > 0$  i lopta

$B(x, r) \subset G_{\alpha_0}$ . Tada,  $B(x, r) \subset G$ , tj.  $G$  je otvoren skup u  $\mathbb{R}^n$ .

c) Neka su  $G_i, i \in \{1, \dots, m\}$ , otvoreni skupovi u  $\mathbb{R}^n$  i  $G = \bigcap_{i=1}^m G_i$ . Tada za  $x \in G$ , važi da je  $x \in G_i$  za svako  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Kako je svaki od skupova  $G_i$  po pretpostavci otvoren, to postoje pozitivni brojevi  $r_i > 0, i \in \{1, \dots, m\}$  takvi da lopte  $B(x, r_i) \subset G_i, i \in \{1, \dots, m\}$ . Neka je  $r = \min_{1 \leq i \leq m} r_i$ . Lopata  $B(x, r)$  pripada svakom od skupova  $G_i, i \in \{1, \dots, m\}$ , pa samim tim i skupu  $G$ .  $\square$

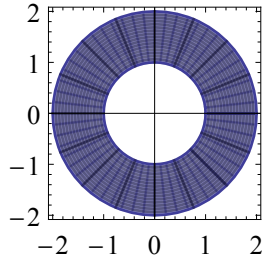
KOMENTAR 1.36. Uslov za konačnost familje otvorenih skupova u c) nije moguće izostaviti. Naime, ukoliko posmatramo familiju intervala  $I_k, k \in \mathbb{N}$ , gdje je  $I_k = (a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}) (b > a)$ , koji su jasno otvoreni skupovi u  $(\mathbb{R}, d)$ , njihov presjek je  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$ , skup koji nije otvoren u prostoru  $(\mathbb{R}, d)$ .

PRIMJER 1.37. Po definiciji dokažimo da je skup  $A = \{(x, y) | r_1 < x^2 + y^2 < r_2\} (0 < r_1 < r_2)$  (slika) otvoren skup. Za proizvoljno  $x \in A$  i  $\delta = \min\{\|x\| - r_1, r_2 - \|x\|\}$  pokažimo da  $B(x, \delta) \subset A$ . Naime, za  $y \in B(x, \delta)$  važi  $d(x, y) = \|x - y\| < \delta$ , tj.  $\|y\| < \|x\| + \delta \leq r_2$ . Dalje je

$$\|y\| \geq \|\|x\| - \|x - y\|\| > \|x\| - \delta \geq r_1,$$

tj.  $y \in A$ .

Na drugi način, primijetimo da je  $A = B(0, r_2) \cap B^c(0, r_1)$ , tj.  $A$  je otvoren skup kao presjek dva otvorena skupa.



DEFINICIJA 1.38. Za skup  $F, F \subset \mathbb{R}^n$ , kažemo da je *zatvoren* u  $\mathbb{R}^n$  ako je skup  $\mathbb{R}^n \setminus F$  otvoren u  $\mathbb{R}^n$ .

PRIMJER 1.39. Jednočlan skup  $\{a\}, a \in \mathbb{R}$  je zatvoren jer  $\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$ .

PRIMJER 1.40. Segment  $[a, b]$  je zatvoren skup u  $\mathbb{R}$  jer je  $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ . U opštijoj situaciji, zatvorena lopta  $\overline{B}(a, r)$  je zatvoren skup jer  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a, r) = B^c(a, r)$  je otvoren skup.

PRIMJER 1.41. Sfera  $S^{n-1}(a, r)$  je takođe primjer zatvorenog skupa u  $\mathbb{R}^n$  jer  $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}(a, r) = B(a, r) \cup B^c(a, r)$ .

Naredna teorema predstavlja analog Teoreme 1.35.

TEOREMA 1.42. a) *Prostor  $\mathbb{R}^n$  i  $\emptyset$  su zatvoreni skupovi u  $\mathbb{R}^n$ .*

b) *Presjek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova u  $\mathbb{R}^n$  je zatvoren skup u  $\mathbb{R}^n$ .*

c) Unija konačno mnogo zatvorenih skupova u  $\mathbb{R}^n$  je zatvoren skup u  $\mathbb{R}^n$ .

DOKAZ. Dokaz za a) slijedi iz a) Teoreme 1.35. Tvrdjenje b) slijedi iz b) Teoreme 1.35 i De Morganovih obrazaca, naime za familiju  $\{F_\alpha | \alpha \in I\}$  zatvorenih skupova  $F_\alpha$  u  $\mathbb{R}^n$ , gdje je  $I$  neki skup indeksa važi

$$\left( \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha^c.$$

Slično za c) razmatramo konačnu familiju zatvorenih skupova  $F_i, 1 \leq i \leq m$ , gdje je  $m \in \mathbb{N}$  neki fiksiran prirodan broj. Tada

$$\left( \bigcup_{i=1}^m F_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^m F_i^c.$$

□

KOMENTAR 1.43. Uslov za konačnost unije zatvorenih skupova u c) nije moguće promijeniti, tj. tvrdjenje ne važi za proizvoljnu familiju zatvorenih skupova. Na primjer, za familiju zatvorenih intervala  $\{I_k | k \in \mathbb{N}\}$ ,  $I_k = [a + \frac{1}{k}, b - \frac{1}{k}]$ ,  $(b - a > 2)$  unija  $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = (a, b)$  je otvoren skup u  $(\mathbb{R}, d)$ .

DEFINICIJA 1.44. Neka je  $A \subset \mathbb{R}^n$  i  $a \in \mathbb{R}^n$ . Tada za tačku  $a$  kažemo da je:

- 1) unutrašnja tačka skupa  $A$  ako postoji okolina tačke  $a$  koja (zajedno sa  $a$ ) pripada skupu  $A$ . Skup svih unutrašnjih tačaka skupa  $A$  označavamo sa  $A^\circ$  ili  $\text{Int}(A)$ ;
- 2) spoljašnja tačka skupa  $A$  ako je  $a$  unutrašnja tačka skupa  $\mathbb{R}^n \setminus A$ . Skup svih spoljašnjih tačaka skupa  $A$  označavamo sa  $\text{Ext}(A)$ ;
- 3) granična tačka skupa  $A$  ako za svaku okolinu tačke  $a$  ima neprazan presjek sa  $A$  i  $\mathbb{R}^n \setminus A$ . Skup svih graničnih tačaka skupa  $A$  označavamo sa  $\partial A$ ;
- 4) tačka nagomilavanja skupa  $A$  ako se u svakoj njenoj okolini nalazi beskonačno mnogo tačaka iz  $A$ . Skup svih tačaka nagomilavanja (adherentni skup) označavamo sa  $A'$ ;
- 5) izolovana tačka skupa  $A$  ako  $a$  pripada  $A$  i postoji okolina tačke  $a$  u kojoj nema drugih tačaka iz  $A$  osim  $a$ .

KOMENTAR 1.45. Iz Definicije 1.44 je jasno da je tačka  $a \in A$  izolovana ako nije tačka nagomilavanja za skup  $A$ . Primijetimo da iz Definicije 1.44 slijedi da je skup  $A \subset \mathbb{R}^n$  otvoren ako i samo ako je  $A = A^\circ$ .

DEFINICIJA 1.46. Neka je  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Skup  $A \cup A'$  nazivamo zatvaranjem skupa  $A$  (atherencija skupa  $A$ ) i označavamo sa  $\bar{A}$ .

Iz same Definicije 1.46 direktno slijedi naredno tvrdjenje.

**TEOREMA 1.47.** *Neka je  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Tada skup  $F$  je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, tj. važi  $\overline{F} = F$ .*

**DOKAZ.** Pretpostavimo da je  $F$  zatvoren skup. Iz relacije  $F \subseteq F \cup F'$  jasno slijedi da je  $F \subseteq \overline{F}$ . Neka je dalje  $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ . Kako je  $F$  po pretpostavci zatvoren skup, to je  $\mathbb{R}^n \setminus F$  otvoren skup i postoji lopta  $B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$  za neko  $\delta > 0$ . Zaključujemo da  $x$  nije tačka nagomilavanja skupa  $F$  i  $x \notin F \cup F' = \overline{F}$ . Posljedično  $\overline{F} \subseteq F$ .

Obratno, pretpostavimo da je  $F = \overline{F}$ . Dokažimo da je  $G = \mathbb{R}^n \setminus F$  otvoren skup u  $\mathbb{R}^n$ . Ako je  $G = \emptyset$  dokaz je završen. U protivnom, neka je  $x \in G$  proizvoljna tačka, tada postoji lopta  $B(x, \delta)$  koja sadrži konačno mnogo tačaka iz  $F$  koje su različite od  $x$  ili ih nema. Ukoliko je  $B(x, r) \cap F = \{x_1, \dots, x_m\}$ , neka je  $r = \min_{1 \leq i \leq m} \{\|x - x_i\|\}$ , pa  $B(x, r) \cap F = \emptyset$ , tj.  $B(x, r) \subset G$ .  $\square$

**KOMENTAR 1.48.** Drugi način da okarakterišemo skup  $\overline{F}$  jeste da je to najmanji zatvoren skup koji sadrži dati skup  $F$ . Napomenimo da je prethodni pojam najmanji skup dat u smislu skupovne inkluzije, tj. ako je  $C \subset \mathbb{R}^n$  zatvoren skup takav da je  $F \subset C$ , onda  $\overline{F} \subseteq C$ . Drugačije rečeno,  $\overline{F}$  je presjek svih zatvorenih skupova u  $\mathbb{R}^n$  koji sadrže skup  $F$ .

**KOMENTAR 1.49.** Primijetimo da je  $A \cup A' = A \cup \partial A = \bar{A}$ , tako i drugi naziv za zatvaranje skupa  $\bar{A}$  je atherencija skupa  $A$ .

**POSLJEDICA 1.50.** *Skup  $F \subset \mathbb{R}^n$  je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.*

**1.4. Topološki prostor.** U nastavku navodimo definiciju topološkog prostora čime i opravdavamo naslov ove glave.

**DEFINICIJA 1.51.** Neka je  $\tau$  familija podskupova na skupu  $X$  pri čemu važi:

- 1)  $X$  i  $\emptyset$  pripadaju  $\tau$ .
- 2) Proizvoljna unija elemenata iz  $\tau$  pripada  $\tau$ .
- 3) Konačan presjek elemenata iz  $\tau$  pripada  $\tau$ .

Tada za uređen par  $(X, \tau)$  kažemo da je topološki prostor, a familiju  $\tau$  nazivamo topologijom na  $X$ .

U topološkom prostoru  $X$  elementi familije  $\tau$  su otvoreni skupovi, a njihovi komplementi su zatvoreni skupovi. Slično se definišu i ostali pojmovi poput, primjera radi, okoline tačke. Naime, za proizvoljnu tačku  $x \in X$ , okolina tačke  $x$  je svaki element  $V \in \tau$  za koji  $x \in V$ .

**PRIMJER 1.52.** Trivijalan primjer topološkog prostora je  $X = \emptyset$  i  $\tau = \emptyset$ . Takođe, za proizvoljan neprazan skup  $X$  ukoliko je  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , tj. partitivni skup od  $X$ ,  $(X, \tau)$  je takođe primjer topološkog prostora, gdje je data topologija  $\tau$  u smislu inkluzije najveća moguća na skupu  $X$ .

PRIMJER 1.53. Na skupu  $X = \{a, b, c, d, e\}$  sa

$$\tau = \{X, \emptyset, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

zadata je jedna topologija.

PRIMJER 1.54. Ukoliko je  $X = \mathbb{R}^n$  i  $\tau$  skup svih otvorenih skupova u  $\mathbb{R}^n$ , onda je na osnovu prethodno navedenih svojstava otvorenih skupova jasno da je par  $(\mathbb{R}^n, \tau)$  je topološki prostor. Za topologiju  $\tau$  kažemo da je prirodna ili standardna topologija na  $\mathbb{R}^n$  indukovana (generisana) euklidskom normom.

NAPOMENA 1.55. Kao što je već rečeno na svakom metričkom prostoru  $(X, \tilde{d})$  moguće je definisati familiju svih otvorenih podskupova  $\tau$  koja na taj način daje topološki prostor  $(X, \tau)$ . Za topologiju  $\tau$  rekli bismo da je **generisana metrikom  $\tilde{d}$** .

Da rezimiramo na primjeru  $(\mathbb{R}^n, \tau)$ , polazeći od skalarnog proizvoda (1.9) na  $\mathbb{R}^n$  definišemo euklidsku normu na  $\mathbb{R}^n$ , zatim na osnovu Teoreme 1.14 imamo da je  $(\mathbb{R}^n, d)$  metrički prostor i na kraju dolazimo do topološkog prostora  $(\mathbb{R}^n, \tau)$ , gdje je  $\tau$  familija svih otvorenih skupova u  $\mathbb{R}^n$ .

PRIMJER 1.56. Za topološki prostor  $(X, \tau)$ ,  $X \neq \emptyset$  i  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , primijetimo da je topologija  $\tau$  generisana tzv. diskretnom metrikom

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Za proizvoljno  $x \in X$  imamo da je  $B(x, 1) = \{y | d(x, y) < 1\} = \{x\}$ . Dakle, svaka tačka u  $X$  u diskretnoj topologiji  $\tau$  je istovremeno otvoren i zatvoren skup.

**1.5. Indukovana ili relativna topologija.** Ukoliko je  $(X, \tau)$  topološki prostor i  $Y \subset X$ , tada sa

$$(1.12) \quad \tau_Y = \{U \cap Y | U \in \tau\}$$

je definisana takođe topologija na  $Y$ , što se lako provjerava. Naime,

1)  $\emptyset \in \tau_Y$  i  $Y = Y \cap X \in \tau_Y$ .

2) Ako je  $\mathcal{U}' = \{U_\alpha \cap Y | U_\alpha \in \tau, \alpha \in I\}$  proizvoljna familija skupova iz  $\tau_Y$ , tada  $\cup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap Y) = (\cup_{\alpha \in I} U_\alpha) \cap Y$ , takođe pripada  $\tau_Y$  budući da je  $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$ .

3) Za proizvoljnu konačnu familiju  $\mathcal{U}'' = \{U_i \cap Y | U_i \in \tau, i \in \{1, \dots, m\}\}$  presjek  $\cap_{i=1}^m (U_i \cap Y) = (\cap_{i=1}^m U_i) \cap Y$  pripada  $\tau_Y$  zbog činjenice da je  $\cap_{i=1}^m U_i \in \tau$ .

Tako dolazimo do definicije topološkog potprostora.

DEFINICIJA 1.57. Neka je  $(X, \tau)$  topološki prostor i  $Y \subset X$ . Tada par  $(Y, \tau_Y)$ , gdje je  $\tau_Y$  definisana sa (1.12), nazivamo topološkim potprostorom topološkog prostora  $X$ . Za topologiju  $\tau_Y$  kažemo da je indukovana ili relativna topologija na  $Y$ .

PRIMJER 1.58. Polazimo od  $(\mathbb{R}^2, \tau)$ , gdje je  $\tau$  standardna topologija euklidske ravni. Za  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ , indukovana topologija  $\tau_{\mathbb{R}}$  je standardna topologija na  $\mathbb{R}$ . Međutim, otvoren skup, tj. element iz  $\tau_{\mathbb{R}}$  ne mora da bude otvoren u  $\mathbb{R}^2$ , tj. element topologije  $\tau$ . Primjera radi, otvoreni interval  $(a, b)$  jeste element topologije  $\tau_{\mathbb{R}}$ , a očigledno nije otvoren u standardnoj topologiji euklidske ravni  $\mathbb{R}^2$ .

Posljednji primjer prirodno nameće pitanje za kakve  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , otvoren skup topološkog prostora  $Y ((Y, \tau_Y))$  biće otvoren u  $\mathbb{R}^n ((\mathbb{R}^n, \tau))$ . Odgovor dajemo u narednoj teoremi, a dokaz ostvaljamo za vježbu čitaocu.

TEOREMA 1.59. *Neka je  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , pri čemu je na  $\mathbb{R}^n$  definisana standardna topologija  $\tau$ . Tada:*

- a) *Skup  $A \subseteq Y$  je otvoren u  $Y$  (element topologije  $\tau_Y$ ) ako i samo ako postoji otvoren skup  $U$  iz  $\mathbb{R}^n$  takav da je  $A = Y \cap U$ .*
- b) *Da bi svaki skup  $A$  koji je otvoren u  $Y$  bio otvoren u  $\mathbb{R}^n$  potrebno je i dovoljno da  $Y$  bude otvoren u  $\mathbb{R}^n$ .*

PRIMJER 1.60. Ako je  $[a, b]$  zatvoren segment realne prave  $\mathbb{R}$ , primijetimo da su u indukovanoj topologiji (iz  $\mathbb{R}$ ) na  $[a, b]$  polusegmenti oblika  $[a, c)$   $(c, b]$  kao i intervali  $(c, d)$  ( $a < c < d < b$ ) otvoreni skupovi u  $[a, b]$ .

## 1.6. Konvergencija nizova u $\mathbb{R}^n$ .

DEFINICIJA 1.61. Za niz  $\{x_k\}_{k \geq 1}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  tačaka kažemo da konvergira ka tački  $x \in \mathbb{R}^n$  ako za svaku okolinu  $U$  tačke  $x$  postoji prirodan  $N \in \mathbb{N}$ , takav da je  $x_k \in U$  za svako  $k > N$ .

Definicija 1.61 predstavlja prirodno uopštenje definicije konvergencije niza realnih brojeva iz Analize 1. Interesantno je zapaziti da je konvergencija niza u prethodnoj definiciji data u terminima otvorenih skupova.

Konvergeniciju niza  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  iz Definicije 1.61 zapisujemo standardno

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x.$$

Imajući u vidu da za okolinu  $U$  iz Definicije 1.61 možemo da uzmemo loptu  $B(0, \epsilon)$  dolazimo do poznatog " $\epsilon - N$ " zapisa za konvergenciju niza  $\{x_k\}_{k \geq 1}$ , tj.

$$(1.13) \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(k > N \Rightarrow d(x_k, x) < \epsilon).$$

Primijetimo da zapis (1.13) zapravo znači da  $x_k \rightarrow x$ ,  $k \rightarrow \infty$  ako i samo ako  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0$ .

Ukoliko označimo sa  $x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$  i  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , postavlja se prirodno pitanje da li konvergencija niza u prostoru  $\mathbb{R}^n$  povlači konvergenciju po koordinatama i obratno. Odgovor se sastoji u odnosu metrika  $d$  i  $d_{\infty}$  (ili  $d_1$ ) (vidjeti Primjer 1.5), tj. koristeći nejednakosti (1.5) lako dolazimo do sledećeg rezultata.

TEOREMA 1.62. *Neka je  $\{x_k\}_{k \geq 1}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  i  $x \in \mathbb{R}^n$ . Tada*

$$x_k \rightarrow x, k \rightarrow \infty \Leftrightarrow x_i^k \rightarrow x_i, k \rightarrow \infty \text{ za } i \in \{1, \dots, n\}.$$

NAPOMENA 1.63. Konvergenciju niza  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  moguće je definisati i u proizvoljnom metričkom prostoru  $(X, \tilde{d})$ .

Tako za niz  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ,  $x_n \in X$  kažemo da konvergira ka tački  $x \in X$  ako za svako  $\epsilon > 0$  postoji prirodan broj  $N \in \mathbb{N}$  takav da  $\tilde{d}(x_n, x) < \epsilon$  za svaki prirodan broj  $n$  takav da  $n > N$ , tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow \tilde{d}(x_n, x) < \epsilon).$$

DEFINICIJA 1.64. Neka su  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ . Kažemo da je skup  $A$  gust u skupu  $B$  ako je  $B \subset \overline{A}$ . Ako je  $\overline{A} = \mathbb{R}^n$ , onda kažemo da je  $A$  svuda gust u  $\mathbb{R}^n$ .

Drugačije rečeno, skup  $A$  je gust u skupu  $B$  ako je svaka tačka skupa  $B$  tačka nagomilavanja skupa  $A$ .

PRIMJER 1.65. Skup racionalnih brojeva  $Q$  je svuda gust u  $\mathbb{R}$ .

PRIMJER 1.66. Koristeći Teoremu 1.62 zaključujemo da je  $Q^n$  svuda gust u  $\mathbb{R}^n$ . Sa druge strane skup  $Q^n$  nije zatvoren u  $\mathbb{R}^n$  što jasno slijedi iz Teoreme 1.47 i činjenice da je  $Q^n = \mathbb{R}^n$ .

DEFINICIJA 1.67. Za metrički prostor  $(X, \tilde{d})$  kažemo da je separabilan ako sadrži najviše prebrojiv svuda gust podskup.

PRIMJER 1.68. Kako je  $Q^n$  prebrojiv i svuda gust u  $\mathbb{R}^n$ , to je euklidski prostor  $\mathbb{R}^n$  separabilan metrički prostor.

## 1.7. Nепrekidnost funkcija više promjenljivih.

### Granična vrijednost funkcije

U fokusu razmatranja ovog poglavlja nalaze se funkcije više promjenljivih  $f$  definisanih na nekom podskupu  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , bilo da su one realno vrijednosne  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  (skalarne funkcije) ili da su u pitanju funkcije sa vrijednostima u višedimenzionalnim prostorima  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$  (vektorske funkcije). Vektorske funkcije  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  standardno zapisujemo  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , gdje su  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  skalarne funkcije. U tekstu koji slijedi standardno navodimo prvo definiciju granične vrijednosti funkcije u tački i potom više ekvivalentnih definicija neprekidnosti funkcije. Osnovna ideja neprekidnosti preslikavanja  $x \rightarrow f(x)$ , da za mala pomjeranja tačke  $x$  u efektu imamo takođe mala pomjeranja tačke  $f(x)$ , biće prezentovana u kontekstu topoloških i metričkih prostora imajući u vidu uvijek osnovni slučaj  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Naredna definicija odnosi se na pojam granične vrijednosti funkcija više promjenljivih.

DEFINICIJA 1.69. Neka su  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  je tačka nagomilavanja skupa  $A$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Za tačku  $b \in \mathbb{R}^m$  kažemo da je granična

vrijednost funkcije  $f$  u tački  $a \in \mathbb{R}^n$  ako za svako  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  tako da za svako  $x \in A$  takvo da je  $0 < \|x - a\| < \delta$  važi  $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$ .

Simbolično zapisano

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Primjećujemo da je definicija granične vrijednosti funkcije više promjenljivih u direktnoj koorespondenciji sa definicijom granične vrijednosti realno vrijednosne funkcije  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa razlikom što je metrika u  $\mathbb{R}$  zamijenjena euklidskom metrikom u  $\mathbb{R}^n$ . Takođe, osnovne osobine graničnih vrijednosti funkcije u tački izvodimo analogno odgovarajućim osobinama graničnih vrijednosti realno vrijednosnih funkcija definisanim na  $\mathbb{R}$ . Primjera radi, ako je  $a \in \mathbb{R}^n$  tačka nagomilavanja skupa  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  su funkcije koje imaju granične vrijednosti  $b_1 \in \mathbb{R}^m$  i  $b_2 \in \mathbb{R}^m$  u tački  $a$  respektivno, tada

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b_1 \pm b_2.$$

Ukoliko, na primjer, pod gornjim pretpostavkama uz ograničenje da se radi o skalarnim funkcijama, tj. da je  $m = 1$  i ako pretpostavimo da postoje granične vrijednosti funkcija  $f$  i  $g$  u tački  $a$ , onda imamo da važi

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Slično, pod prethodnim pretpostavkama zadržavajući uslov  $m = 1$  ako je  $g(x) \neq 0$  za  $x \in A$  i  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  imamo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Poznato je da ekvivalentna definicija granične vrijednosti u tački realno vrijednosne funkcije definisane na  $\mathbb{R}$  data i preko Hajneove definicije. Situacija je identična u slučaju funkcija više promjenljivih.

**TEOREMA 1.70. (Hajneova definicija granične vrijednosti)**  
*Neka je  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  je tačka nagomilavanja skupa  $A$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Za tačku  $b \in \mathbb{R}^m$  kažemo da je granična vrijednost funkcije  $f$  u tački  $a \in \mathbb{R}^n$  ako i samo ako za svaki niz tačaka  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  iz skupa  $A$  koji konvergira ka tački  $a$  niz  $f(x_k)$  konvergira ka  $b$  kada  $k \rightarrow \infty$ .*

Definicija neprekidnosti funkcije više promjenljivih u tački slijedi neposredno iz Definicije 1.69.

**DEFINICIJA 1.71.** Neka je  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in A$  je tačka nagomilavanja skupa  $A$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Funkcija  $f$  je neprekidna u tački  $a$  ako i samo ako  $\lim_{A \ni x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

U nastavku dajemo topološku definiciju neprekidnosti funkcije koju navodimo u opštijoj situaciji gdje euklidske prostore  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  zamijenjujemo sa topološkim prostorima  $(X, \tau_x)$  i  $(Y, \tau_y)$ .

DEFINICIJA 1.72. Neka su  $(X, \tau_x)$  i  $(Y, \tau_y)$  topološki prostori,  $A \subseteq X$ ,  $a \in A$  i  $f : A \rightarrow Y$ . Za preslikavanje  $f$  kažemo da je neprekidno u tački  $a$  ako za svaku okolinu  $V$  tačke  $f(a)$  postoji okolina  $U$  tačke  $a$  takva da

$$f(U \cap A) \subset V.$$

Primijetimo da se prethodna definicija odnosi na neprekidnost funkcije  $f$  u tački  $a$  u odnosu na relativnu topologiju na  $A$ .

Obrazložimo Definiciju 1.72 u terminima " $\epsilon - \delta$ " definicije i euklidskih prostora  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  uzimajući konkretno da je okolina  $V$  lopta sa centrom u  $f(a)$  poluprečnika  $\epsilon > 0$ , a  $U = B(a, \delta)$ .

DEFINICIJA 1.73. Neka  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in A$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Za funkciju  $f$  kažemo da je neprekidna u tački  $a$  ako za svako  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$  tako da za svako  $x \in A$  za koje je  $\|x - a\| < \delta$  važi  $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$ , tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon, a) > 0)(\forall x \in A)(\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon).$$

DEFINICIJA 1.74. Neka  $A \subset \mathbb{R}^n$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Za funkciju  $f$  kažemo da je neprekidna na  $A$  ako je neprekidna u svakoj tački  $a \in A$ .

KOMENTAR 1.75. Ukoliko je  $f$  skalarna funkcija iz Definicije 1.74, onda koristimo zapis  $f \in C(A)$ . Sa druge strane, ako je  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  vektor funkcija u upotrebi je i zapis  $f \in C(A; \mathbb{R}^m)$ .

TEOREMA 1.76. Neka  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  i  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Tada

$$f \in C(A; \mathbb{R}^m) \text{ ako i samo ako } f_i \in C(A), i \in \{1, \dots, m\}.$$

DOKAZ. Dokaz tvrđenja slijedi direktno iz nejednakosti

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \left( \sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(y))^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|,$$

za  $x, y \in A$ . □

PRIMJER 1.77. Konstantna funkcija  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(x) = b$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , je primjer neprekidne funkcije. Jasno da u proizvoljnoj tački  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  i za proizvoljno  $\epsilon > 0$  i  $\delta > 0$  za  $x \in \mathbb{R}^n$  iz  $\|x - x_0\| < \delta$  imamo da važi  $\|f(x) - f(x_0)\| = 0 < \epsilon$ .

PRIMJER 1.78. Identitet funkcija,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = x$  je neprekidna funkcija na  $\mathbb{R}^n$ . Za proizvoljno  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  i  $\epsilon > 0$ , za  $\delta = \epsilon$  i za svako  $x \in \mathbb{R}^n$  iz  $\|x - x_0\| < \delta$  slijedi  $\|f(x_0) - f(x)\| = \|x - x_0\| < \epsilon$ .

PRIMJER 1.79. U ovom primjeru dokazujemo neprekidnost funkcije proizvoda  $f(x, y) = xy$ . Neka je  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  i  $\epsilon > 0$ . Neka je  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ , tada jasno da je  $\|(x, y)\| \leq \delta + \|(x_0, y_0)\|$ . Izabraćemo  $\delta$

pošto ocijenimo razliku

$$\begin{aligned}
 & |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\
 &= |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\
 &\leq |y - y_0||x| + |x - x_0||y_0| \\
 &\leq \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} \sqrt{|x|^2 + |y_0|^2} \\
 &\leq \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} \sqrt{(\|(x_0, y_0)\| + \delta)^2 + \|(x_0, y_0)\|^2}.
 \end{aligned}$$

Dakle, možemo da izaberemo  $\delta$  tako da  $\sqrt{2}\delta(\delta + \|(x_0, y_0)\|) < \epsilon$ . Rješavajući prethodnu nejednačinu nalazimo da je  $\delta \in (0, \frac{\sqrt{\|(x_0, y_0)\|^2 + 2\sqrt{2}\epsilon - \|(x_0, y_0)\|}}{2})$ .

PRIMJER 1.80. Norma na euklidskom prostoru  $\mathbb{R}^n$  posmatrana kao funkcija  $f(x) = \|x\|$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  je neprekidna. Naime, iz već dokazane nejednakosti

$$|||x| - |y||| \leq \|x - y\|, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

za normu  $\|\cdot\|$  na prostoru  $\mathbb{R}^n$ , za proizvoljno  $\epsilon$  i  $x \in \mathbb{R}^n$  uzimajući da je  $\delta = \epsilon$  dobijamo da za  $y \in \mathbb{R}^n$  za koje je  $\|x - y\| < \delta$  slijedi  $|f(x) - f(y)| = \|x - y\| < \epsilon$ .

PRIMJER 1.81. Preslikavanje  $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  definisano na način  $p_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$  nazivamo  $i$ -tom projekcijom. Nejednakost

$$|p_i(x) - p_i(y)| \leq \|x - y\|, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

implicira da je  $p_i$  neprekidno preslikavanje na  $\mathbb{R}^n$ .

Na ovom mjestu navedimo jednu značajnu osobinu preslikavanja  $p_i$ . Ako je  $G \subset \mathbb{R}^n$  otvoren skup, onda će i  $p_i(G)$  biti otvoren skup na  $\mathbb{R}$  (provjeriti). U opštem, preslikavanja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  koja otvorene skupove slikaju na otvorene skupove nazivaju se **otvorenim** preslikavanjima.

PRIMJER 1.82. Skalarni proizvod  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  na euklidskom prostoru  $\mathbb{R}^n$  posmatran kao funkcija od jednog argumenta (drugi je fiksiran) je neprekidna funkcija. Neka je  $b \in \mathbb{R}^n$  i  $f(x) = \langle x, b \rangle$ . Pretpostavimo da je  $b \neq 0$ , u protivnom  $f \equiv 0$ . Za proizvoljno  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $\epsilon > 0$  birajući da je  $\delta = \frac{\epsilon}{\|b\|+1}$  za svako  $y \in \mathbb{R}^n$  kad god je  $\|x - y\| < \delta$  na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti važi

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &= |\langle x, b \rangle - \langle y, b \rangle| = |\langle x - y, b \rangle| \\
 &\leq \|x - y\| \|b\| < \epsilon.
 \end{aligned}$$

PRIMJER 1.83. Funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

nije neprekidna u tački  $(0, 0)$ . Naime, prema Definiciji 1.71 potreban i dovoljan uslov neprekidnosti funkcije  $f$  u tački  $(0, 0)$  jeste da  $f$  mora da

ima graničnu vrijednost u tački  $(0, 0)$  jednaku  $f(0, 0) = 0$ . Dalje, prema Teoremi 1.70 neprekidnost funkcije  $f$  u tački  $(0, 0)$  povlači da za svaki niz  $(x_n, y_n)$  koji konvergira ka  $(0, 0)$  mora da bude  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(0, 0)$ . Međutim, birajući niz  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  koji evidentno konvergira ka  $(0, 0)$  imamo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0),$$

tj.  $f$  nije neprekidna u tački  $(0, 0)$ .

Daćemo i topološki argument za prekid funkcije  $f$  u tački  $(0, 0)$ . Ako bi funkcija  $f$  bila neprekidna u tački  $(0, 0)$ , onda za svaku okolinu  $V$  tačke  $f(0, 0) = 0$  postoji okolina  $U$  tačke  $(0, 0)$  takva da  $f(U) \subset V$ . Za  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$  i okolinu  $V = (-\epsilon, \epsilon)$  uz pretpostavljenu neprekidnost funkcije  $f$  u tački  $(0, 0)$  postoji okolina  $U$  tačke  $(0, 0)$  takva da

$$(1.14) \quad f(U) \subset V.$$

Međutim, kako je  $U$  otvoren skup u  $\mathbb{R}^2$  to postoji  $\delta > 0$  i lopta sa centrom u  $(0, 0)$  koja pripada  $U$ , tj.  $B(0, \delta) \subset U$ . Tada prava  $y = x$  ima neprazan presjek sa  $B(0, \delta)$ . Prema tome, ako označimo sa  $A = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$  imamo

$$f(A \cap U) = \frac{1}{2}$$

što je kontradikcija zbog (1.14).

Primijetimo da u posljednjem primjeru postoje tzv. **ponovljene granične vrijednosti funkcije**  $f$  u tački  $(0, 0)$ . Konkretno,

$$(1.15) \quad \begin{aligned} l_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = 0, \\ l_2 &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, uprkos činjenici da postoje ponovljene granične vrijednosti funkcije  $f$  u tački  $(0, 0)$  i da su one jednake, funkcija  $f$  nije neprekidna u  $(0, 0)$ .

Sljedeći primjer pokazuje da je moguć i obrat. Preciznije, funkcija može da bude neprekidna u tački, a da nema ponovljenu granične vrijednost u toj tački.

PRIMJER 1.84. Funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y, & y \neq 0, x \in \mathbb{R}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

je neprekidna u tački  $(0, 0)$  što slijedi iz nejednakosti  $0 \leq |f(x, y)| \leq |x| + |y|$  i zato je

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

Sa druge strane,

$$l_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y} + y \right) = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0,$$

a  $l_1$  ne postoji iz razloga što ne postoji  $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ .

U narednoj teoremi dajemo odgovor na pitanje kada postoje ponovljene granične vrijednosti funkcije u tački u kojoj je neprekidna.

**TEOREMA 1.85.** *Neka je  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje  $A = \{(x, y) | 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r\}$  i pretpostavimo da postoji granična vrijednost  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$  i za svako  $y \neq y_0$ ,  $|y - y_0| < r$ , postoji  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y)$ , tada postoji ponovljena granična vrijednost  $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$  i važi*

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = l.$$

**KOMENTAR 1.86.** Razmatrane su ponovljene granične vrijednosti za funkcije od dvije promjenljive. Na isti način definišemo i ponovljene granične vrijednosti za funkcije od  $n$  promjenljivih,  $n > 2$ .

**PRIMJER 1.87.** Funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

je neprekidna u tački  $(0, 0)$  duž svake prave koja prolazi kroz koordinatni početak. Zaista, za fiksiran parametar  $\alpha \in [0, 2\pi)$  i pravu  $x = t \cos \alpha$ ,  $y = t \sin \alpha$ ,  $t > 0$  ( $\alpha$  je ugao koji ta prava zaklapa sa pozitivnim dijelom  $x$ -ose) imamo

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = 0.$$

Funkcija  $f$  ipak nije neprekidna u  $(0, 0)$ . Na primjer, za okolinu  $V$  nule u  $\mathbb{R}$ ,  $V = (-\epsilon, \epsilon)$  gdje  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$  i proizvoljnu okolinu  $U$  tačke  $(0, 0)$  imamo

$$f(B \cap U) = \frac{1}{2}, \quad B = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$$

tj. za svaku okolinu  $U$  tačke  $(0, 0)$  imamo da  $f(U) \not\subset V$  (slika). Funkcija  $f$ , prema dokazanom, je neprekidna u tački  $(0, 0)$  po svakom pravcu, dok ako težimo ka  $(0, 0)$  po paraboli  $y = x^2$  funkcija ima prekid u  $(0, 0)$ .

**PRIMJER 1.88.** Neka je  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearno preslikavanje. Kao što je poznato dejstvo linearnog preslikavanja  $A$  na vektorskom prostoru  $\mathbb{R}^n$  je jedinstveno određeno matricom datog preslikavanja, koju

ćemo označiti isto sa  $A$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gdje se u kolonama nalaze koordinate slika baznih vektora  $A(e_i), i \in \{1, \dots, n\}$ .

Tada za proizvoljno  $x \in \mathbb{R}^n$   $Ax = y$  vektor  $y = (y_1, \dots, y_m)$  je određen sa

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

U nastavku za proizvoljno izabrano  $x \in \mathbb{R}^n$  primijetimo da koristeći Koši-Švarcovu dobijamo

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right)^2 \right)^{1/2} \\ (1.16) \quad &\leq \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2} \|x\|. \end{aligned}$$

Označimo sa  $C = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ . Ukoliko je  $C = 0$  preslikavanje se trivijalno svodi na nulto, inače za proizvoljno  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $\epsilon > 0$  birajući  $\delta = \frac{\epsilon}{1+C}$  imamo

$$(1.17) \quad \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq C\|x - y\| < \epsilon$$

za svako  $y \in \mathbb{R}^n$  takvo da  $\|y - x\| < \delta$ . Time je dokazana neprekidnost linearnog preslikavanja  $A$  na  $\mathbb{R}^n$ .

Primijetimo da prema uvedenoj definiciji norme linearnog preslikavanja (1.5) iz Primjera 1.22 dokazali smo da je

$$\|A\| \leq \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

**PRIMJER 1.89. Izometrija metričkih prostora** Neka su  $(X_1, d_1)$  i  $(X_2, d_2)$  metrički prostori i  $f : X_1 \rightarrow X_2$  je bijekcija sa svojstvom

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y), \quad (\text{da "čuva rastojanje"})$$

onda za preslikavanje  $f$  kažemo da je izometrija metričkih prostora  $(X_1, d_1)$  i  $(X_2, d_2)$ . Za prostore  $(X_1, d_1)$  i  $(X_2, d_2)$  pod prethodnom pretpostavkom kažemo da su izometrični.

Lako se utvrđuje da je izometrija  $f$  neprekidno preslikavanje prostora  $(X_1, d_1)$  u  $(X_2, d_2)$ . Naime, za proizvoljno  $\epsilon > 0$  i proizvoljnu tačku  $x \in X_1$ , jasno da  $f(B(x_1, \frac{\epsilon}{2})) \subset B(f(x_1), \epsilon)$ .

Slično kao i za neprekidne realno vrijednosne funkcije definisane na  $\mathbb{R}$  važi sljedeća teorema.

**TEOREMA 1.90.** *Ako su funkcije  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne na  $A$ , onda:*

- a) *funkcija  $f(x) \pm g(x)$  je neprekidna na  $A$ ;*
- b) *funkcija  $f(x)g(x)$  je neprekidna na  $A$ ;*
- c) *funkcija  $\frac{f(x)}{g(x)}$  je neprekidna na  $A \setminus \{x | g(x) = 0\}$ .*

**TEOREMA 1.91.** *Neka su  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  i  $C \subseteq \mathbb{R}^p$  i  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ . Ako je funkcija  $f$  neprekidna u tački  $a \in A$ , a funkcija  $g$  neprekidna u tački  $b = f(a)$ , onda je kompozicija funkcija  $h = g \circ f$  neprekidna u tački  $a$ .*

**DOKAZ.** Za proizvoljno  $\epsilon > 0$  zbog neprekidnosti funkcije  $g$  u  $b = f(a)$  postoji  $\delta > 0$  takvo da za svako  $y \in B$  za koje je  $\|y - b\| < \delta$  važi  $\|g(y) - g(b)\| < \epsilon$ . Slično, za dato  $\delta > 0$  zbog neprekidnosti funkcije  $f$  u tački  $a$  postoji  $\delta_0 > 0$  tako da za svako  $x \in A$  za koje je  $\|x - a\| < \delta_0$  važi da je  $\|f(x) - b\| < \delta$ . Da sumiramo, za dato  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta_0 > 0$  tako da iz  $\|x - a\| < \delta_0$  imamo da je  $\|g(f(x)) - g(f(a))\| < \epsilon$ , tj.  $h$  je neprekidna u tački  $a$ .  $\square$

**PRIMJER 1.92.** Preslikavanje  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x, y, z) = (xy, e^{x^2+y^2+z^2}, z + x)$$

biće neprekidno na  $\mathbb{R}^3$  ako i samo ako su koordinatne funkcije  $f_1(x, y, z) = xy$ ,  $f_2(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$  i  $f_3(x, y, z) = z + x$  neprekidne skalarne funkcije na  $\mathbb{R}^3$ .

Tako za funkciju  $f_1$ ,  $f_1 = \psi_1 \circ \varphi_1$ , gdje  $\varphi_1(x, y, z) = (x, y)$ , a  $\psi_1(x, y) = xy$ . Funkcija  $\psi_1$  je projekcija iz  $\mathbb{R}^3$  na  $\mathbb{R}^2$ , jasno radi se o linearnom preslikavanju čije dejstvo u matricnom obliku možemo da zapišemo na način

$$\psi_1(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Dakle, funkcija  $f_1$  je neprekidna na  $\mathbb{R}^3$  kao kompozicija neprekidnih funkcija  $\psi_1 \in C(\mathbb{R}^3)$  (Primjer 1.88) i  $\varphi_1 \in C(\mathbb{R}^2)$  (Primjer 1.78). Slično,  $f_2 = \psi_2 \circ \varphi_2$ , gdje  $\psi_2(x) = e^x$ ,  $\varphi_2((x, y, z)) = \|(x, y, z)\|^2$ . Funkcija  $f_2 \in C(\mathbb{R}^3)$  jer  $\psi_2 \in C(\mathbb{R})$  kao elementarna funkcija, a  $\varphi_2 \in C(\mathbb{R}^3)$  (Primjer 1.80). Slično je  $f_3 \in C(\mathbb{R}^3)$  jer  $f_3 = p_1 + p_3$ , a projekcije  $p_1, p_2 \in C(\mathbb{R}^3)$  (Primjer 1.81), ili na drugi način zapisano  $f_3((x, y, z)) = \langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle$ , tj. funkciju  $f_3$  možemo da tretiramo kao funkciju skalarnog proizvoda sa fiksnim argumentom i iz istog razloga je

$f_3 \in C(\mathbb{R}^3)$  (Primjer 1.82). Na kraju, na osnovu Teoreme 1.76 imamo da je  $f \in C(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ .

PRIMJER 1.93. Za funkciju

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 e^{-\frac{1}{xy^2}}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$

nije teško provjeriti da je dobro definisana i neprekidna van koordinatnih osa.

Funkcija  $f(x, y)$  je neprekidna u proizvoljnoj tački  $(x, 0)$ ,  $x > 0$ , a ima prekid u tačkama  $(x, 0)$ ,  $x \leq 0$  (provjeriti). Slično se provjerava da funkcija ima prekid u svakoj tački oblika  $(0, y)$ .

PRIMJER 1.94. Za polinom od  $n$  promjenljivih stepena  $m$ ,  $P_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$P_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \in \mathbb{R}, \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

koristeći sličan argument kao u Primjeru 1.92 pokazujemo da je neprekidna skalarna funkcija na  $\mathbb{R}^n$ .

DEFINICIJA 1.95. Neka je  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Za preslikavanje  $f$  kažemo da je ravnomjerno neprekidno na  $A$  ako za svako  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  tako da za svako  $x, y \in A$  iz  $\|x - y\| < \delta$  slijedi  $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ , tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A)(\|x - y\| < \delta \rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon).$$

PRIMJER 1.96. Funkcija  $f(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^2 + z^4}$  je neprekidna na  $\mathbb{R}^3$ , ali nije ravnomjerno neprekidna. Naime, za nizove  $x_n = (0, n + \frac{1}{n}, 0)$ ,  $y_n = (0, n, 0)$  nije teško utvrditi da  $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , a sa druge strane je  $|f(0, n + \frac{1}{n}, 0) - f(0, n, 0)| = \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} \geq \sqrt{2}$ .

TEOREMA 1.97. Neka su  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  i  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  i  $f : A \rightarrow B$ . Tada su sljedeća tvrđenja ekvivalentna:

- a) funkcija  $f$  je neprekidna na  $A$ ;
- b) inverzna slika  $f^{-1}(G)$  svakog otvorenog skupa  $G$  u  $B$  je otvoren skup u  $A$ ;
- c) inverzna slika  $f^{-1}(F)$  svakog zatvorenog skupa  $F$  u  $B$  je zatvoren skup u  $A$ ;

DOKAZ.  $a) \Rightarrow b)$  : Neka je  $f$  neprekidna funkcija na  $A$  i  $G$  otvoren skup u  $B$ . Tada postoji otvoren skup  $\tilde{G}$  u  $\mathbb{R}^m$  tako da  $G = \tilde{G} \cap B$ . Ako je  $f^{-1}(G) = \emptyset$  tvrđenje je dokazano, stoga pretpostavimo da  $a \in f^{-1}(G)$ . Tada  $f(a) \in G$ , a kako je  $\tilde{G}$  otvoren skup, to postoji  $r > 0$  tako da lopta  $B(f(a), r) \subset \tilde{G}$  i  $V = B(f(a), r) \cap B \subset G$ . Neprekidnost funkcije  $f$  povlači da postoji okolina  $U$  tačke  $a$  u  $A$  takva da je  $f(U) \subset V$ , što znači da  $U \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(G)$ . Prema tome, pokazali smo da za tačku

$a$  postoji okolina  $U$  u  $A$  koja pripada  $f^{-1}(G)$ , tj.  $f^{-1}(G)$  je otvoren skup u  $A$ .

$b) \Rightarrow a)$  : Neka je  $a \in A$  i neka je  $V$  proizvoljna okolina tačke  $f(a)$  u  $B$ . Skup  $f^{-1}(V)$  je otvoren u  $A$  po pretpostavci tvrđenja iz b), a kako je  $a \in f^{-1}(V)$  imamo da je  $f^{-1}(V)$  okolina tačke  $a$ . Sa druge strane,  $f(f^{-1}(V)) \subset V$  pa je  $f$  neprekidna u  $a$ , odnosno  $f$  je neprekidna na  $A$ .

$b) \Rightarrow c)$  : Budući da je skup  $B \setminus F$  otvoren skup, to je  $f^{-1}(B \setminus F) = A \setminus f^{-1}(F)$  otvoren skup po pretpostavci tvrđenja b) odnosno  $f^{-1}(F)$  je zatvoren. Analognim rezonovanjem slijedi obratno tvrđenje.  $\square$

**NAPOMENA 1.98.** Napomenimo da neprekidno preslikavanje ne mora da bude otvoreno, tj. da slika otvorene skupove na otvorene. Kao primjer navodimo funkciju  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  definisanu na  $A = (0, \infty)$  koja je evidentno neprekidna na  $A$ , a  $f((0, 1)) = [-1, 1]$ .

**DEFINICIJA 1.99.** Neka su  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Za preslikavanje  $f : A \rightarrow B$  kažemo da je homeomorfizam ako je  $f$  bijektivno preslikavanje i  $f$  i  $f^{-1}$  su neprekidna preslikavanja. Za skupove  $A$  i  $B$  kažemo da su homeomorfni.

**KOMENTAR 1.100.** Iz same Definicije 1.99 slijedi da je preslikavanje  $f$  neprekidno i otvoreno istovremeno. Ako su dva topološka prostora  $(X, \tau_1)$  i  $(Y, \tau_2)$  homeomorfna, onda je skup  $A \subset X$  otvoren (zatvoren) ako i samo ako je  $f(A)$  otvoren (zatvoren) u  $Y$  (topologiji  $\tau_2$ ). U određenom smislu, homeomorfizam kao preslikavanje igra ulogu među topološkim prostorima koju ima izomorfizam kao preslikavanje ima u kontekstu algebarskih struktura.

**PRIMJER 1.101.** Pokažimo da je skup  $A = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 < x, z > x^2 + y^2, x + y + z < -5\}$  otvoren. Sam skup  $A$  možemo da predstavimo na način  $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ , gdje je  $A_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 < x\}$ ,  $A_2 = \{(x, y, z) | z > x^2 + y^2\}$ ,  $A_3 = \{(x, y, z) | x + y + z + 5 < 0\}$ . Skupove  $A_i$   $i \in \{1, 2, 3\}$  zapišimo dalje

$$A_1 = \{(x, y, z) | \varphi_1(x, y, z) < 0\} = \varphi_1^{-1}((-\infty, 0));$$

$$A_2 = \{(x, y, z) | \varphi_2(x, y, z) < 0\} = \varphi_2^{-1}((-\infty, 0));$$

$$A_3 = \{(x, y, z) | \varphi_3(x, y, z) < 0\} = \varphi_3^{-1}((-\infty, 0)),$$

gdje  $\varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - x$ ,  $\varphi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$  i  $\varphi_3(x, y, z) = x + y + z + 5$ . Kako su  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C(\mathbb{R}^3)$ , to su skupovi  $A_i$   $i \in \{1, 2, 3\}$  otvoreni kao inverzne slike otvorenog skupa  $(-\infty, 0)$  u  $\mathbb{R}$  pri neprekidnim preslikavanjima  $\varphi_i$   $i \in \{1, 2, 3\}$  respektivno. Skup  $A$  je otvoren kao presjek konačnog broja otvorenih skupova.

### 1.8. Komplettnost. Banahova teorema o nepokretnoj tački

Kao što nam je poznato svaki Košijev ili fundamentalni niz u  $\mathbb{R}$  je konvergentan. Navedeno svojstvo prostora  $\mathbb{R}$  predstavlja jedno od

fundamentalnih svojstava realne prave. Po već ustaljenom modelu do sada pomenuto svojstvo razmatramo i u slučaju euklidskog prostora  $\mathbb{R}^n$ . Naredne definicije date su u terminima metričkih prostora.

DEFINICIJA 1.102. Niz tačaka  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  metričkog prostora  $(X, \tilde{d})$  je Košijev niz ako za svako  $\epsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  tako da za indekse  $n, m > n_0$  važi  $\tilde{d}(x_n, x_m) < \epsilon$ . Zapisano simbolički

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n > n_0 \Rightarrow \tilde{d}(x_n, x_m) < \epsilon).$$

DEFINICIJA 1.103. Metrički prostor  $(X, \tilde{d})$  je kompletan ako svaki Košijev niz iz  $X$  konvergira u njemu.

PRIMJER 1.104. Poznati primjer kompletnog metričkog prostora iz Analize 1 je  $(\mathbb{R}, d)$ .

PRIMJER 1.105. (**Metrički prostor  $(\mathbb{R}^n, d)$  je kompletan**) Metrički prostor  $(\mathbb{R}^n, d)$  je takođe kompletan. Naime, ako je  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  ( $x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ ) Košijev niz u  $\mathbb{R}^n$ , onda će zbog Teoreme 1.62 svaki od nizova realnih brojeva  $\{x_i^k\}_{k \geq 1}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  biti Košijev niz u  $\mathbb{R}$  pa prema tome i konvergentan u  $\mathbb{R}$ , tj. postoji  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tada opet zbog Teoreme 1.62 važi da  $x_k \rightarrow x$ ,  $k \rightarrow \infty$  u metrici  $d$  prostora  $\mathbb{R}^n$ , tj.  $(\mathbb{R}^n, d)$  je kompletan metrički prostor.

PRIMJER 1.106. Skup  $\mathbb{Q}^n$  nije kompletan u  $(\mathbb{R}^n, d)$ , što se može provjeriti uzimajući, na primjer, tačku  $(x_1, q_2, \dots, q_n)$  (za slučaj da je  $n > 1$ ) gdje su  $q_i$ ,  $2 \leq i \leq n$  fiksirani racionalni brojevi, dok je  $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Kako je skup  $\mathbb{Q}$  gust u  $\mathbb{R}$  to postoji neki niz racionalnih brojeva  $\{q^j\}_{j \geq 1}$  takav da  $\lim_{j \rightarrow \infty} q^j = x_1$ . Tada  $\{(q^j, q_2, \dots, q_n)\}_{j \geq 1}$  je očigledno Košijev niz u  $\mathbb{Q}^n$  koji konvergira ka tački  $(x_1, q_2, \dots, q_n)$  koja ne pripada  $\mathbb{Q}^n$ .

Primijetimo da u posljednjem primjeru skup  $\mathbb{Q}^n$  nije zatvoren u  $\mathbb{R}^n$  u čemu bi se mogao naslutiti razlog zašto dati prostor nije kompletan. Sledeća teorema daje odgovor u opštijoj situaciji tretirajući metrički prostor  $(X, \tilde{d})$  umjesto  $(\mathbb{R}^n, d)$ .

TEOREMA 1.107. *Neka je  $(X, \tilde{d})$  kompletan metrički prostor i  $Y \subset X$ . Tada metrički potprostor  $(Y, \tilde{d})$  je kompletan ako i samo ako je  $Y$  zatvoren skup u  $X$ .*

DOKAZ. Pretpostavimo da je  $(Y, \tilde{d})$  kompletan metrički prostor i neka je  $x \in \overline{Y}$ . Tada kako je  $x$  tačka nagomilavanja skupa  $Y$ , to postoji niz  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  iz  $Y$  koji konvergira ka  $x$ . Međutim,  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  je Košijev niz što jednostavno dokazuje. Naime, za proizvoljno  $\epsilon > 0$ , postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  tako da za  $n > n_0$  slijedi da je  $\tilde{d}(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$ . Tada za sve indekse  $m, n > n_0$  imamo

$$\tilde{d}(x_n, x_m) \leq \tilde{d}(x_n, x) + \tilde{d}(x_m, x) < \epsilon.$$

Zaključujemo da je niz  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  konvergentan u  $Y$  i zbog jedinstvenosti granice limesa u metričkom prostoru (provjeriti) važi  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in Y$ , tj.  $\overline{Y} = Y$ .

Obratno, pretpostavimo da je  $Y$  zatvoren skup u metričkom prostoru  $X$ . Neka je  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  Košijev niz u metričkom potprostoru  $(Y, \tilde{d})$ . Tada je  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  takođe Košijev niz u širem metričkom prostoru  $(X, \tilde{d})$ . Kako je  $(X, \tilde{d})$  kompletan metrički prostor, to je niz  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  konvergentan u  $X$  i označimo opet sa  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Sa druge strane,  $Y$  je zatvoren skup i zato sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, tj.  $x \in Y$ . Zaključujemo da je  $(Y, \tilde{d})$  kompletan metrički prostor.  $\square$

Dokazano je da svaki  $(X, \|\cdot\|)$  normiran vektorski prostor možemo da posmatramo i kao odgovarajući metrički prostor, slično važi i za Euklidov prostor. U tom smislu sljedeće dvije definicije pojavljuju se kao određeni specijalni slučajevi već uvedene Definicije 1.103.

**DEFINICIJA 1.108.** Za normiran prostor  $(X, \|\cdot\|)$  kažemo da je Banahov ako je on kompletan u metrici koja je indukovana normom  $\|\cdot\|$ .

**PRIMJER 1.109.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  je Banahov prostor.

Pretpostavimo da je na vektorskom prostoru  $X$  definisan skalarni proizvod  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**DEFINICIJA 1.110.** Euklidov prostor  $X$  koji je Banahov prostor u normi indukovanoj skalarnim proizvodom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nazivamo Hilbertovim prostorom.

**PRIMJER 1.111.** Prostor  $\mathbb{R}^n$  na kome je definisan standardni skalarni proizvod  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  je kanonski primjer za Hilbertov prostor.

Narednu definiciju i Teoremu 1.114 dajemo u kontekstu metričkih prostora.

**DEFINICIJA 1.112.** Neka su  $(X, d_1)$  i  $(Y, d_2)$  metrički prostori. Preslikavanje  $f : X \rightarrow Y$  nazivamo kontrakcijom ako postoji realan broj  $q, q \in (0, 1)$ , takav da za svako  $x, y \in X$  važi  $d_2(f(x), f(y)) \leq q d_1(x, y)$ .

**KOMENTAR 1.113.** Broj  $q$  nazivamo koeficijentom kontrakcije preslikavanja  $f$ .

Sljedeća teorema predstavlja poznati i klasični rezultat u matematičkoj analizi sa brojnim primjenama i uopštenjima. Napomenimo da za preslikavanje  $f : X \rightarrow X$  metričkog prostora  $X$  u sebe kažemo da ima nepokretnu (fiksnu) tačku ako postoji  $x^* \in X$  tako da je  $f(x^*) = x^*$ .

**TEOREMA 1.114. (Banahova teorema o nepokretnoj tački)**  
Neka je  $f : X \rightarrow X$  kontrakcija kompletnog metričkog prostora  $(X, \tilde{d})$

u samog sebe sa koeficijentom kontrakcije  $q$ . Tada preslikavanje  $f$  ima jedinstvenu nepokretnu tačku. Dodatno,

$$(1.18) \quad \tilde{d}(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \tilde{d}(x_1, x_0).$$

DOKAZ. Uzimajući proizvoljno  $x_0 \in X$  formiramo niz  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  na način  $x_n = f(x_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Dokazujemo da je  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  je Košijev niz. U tom cilju, primijetimo da za svako  $n \in \mathbb{N}$  važi

$$\tilde{d}(x_{n+1}, x_n) = \tilde{d}(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq q \tilde{d}(x_n, x_{n-1}),$$

tako dobijamo da je

$$(1.19) \quad \tilde{d}(x_{n+1}, x_n) \leq q^n \tilde{d}(x_1, x_0), \text{ za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo da  $\tilde{d}(x_1, x_0) \neq 0$ , u protivnom  $f(x_0) = x_0$ . Kako je  $0 < q < 1$ , to za proizvoljno  $\epsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takvo da je

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} q^k < \frac{\epsilon}{\tilde{d}(x_1, x_0)}.$$

Neka su sada  $m, n \in \mathbb{N}$  ( $m > n$ ) takvi da  $m, n > n_0$ . Tada posljednja nejednakost, (1.19) i nejednakost trougla za metriku daju

$$(1.20) \quad \tilde{d}(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \tilde{d}(x_k, x_{k+1}) \leq \tilde{d}(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} q^k \leq \tilde{d}(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{\infty} q^k < \epsilon.$$

Zaključujemo da je  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  Košijev niz. Zbog potpunosti prostora  $X$  postoji tačka  $x^* \in X$  tako da niz  $x_n$  konvergira ka  $x^*$ . Ostaje da se pokaže da je  $x^*$  nepokretna tačka preslikavanja  $f$ .

Nejednakosti

$$(1.21) \quad 0 \leq \tilde{d}(x_n, f(x^*)) = \tilde{d}(f(x_{n-1}), f(x^*)) \leq q \tilde{d}(x_{n-1}, x^*)$$

uz činjenicu da  $x_n \rightarrow x^*$  kad  $n \rightarrow \infty$  povlače da  $x_n \rightarrow f(x^*)$ , kada  $n \rightarrow \infty$ . Primijetimo da u posljednjem zaključku koristimo neprekidnost funkcije  $F : X \rightarrow X$ ,  $F(x) = \tilde{d}(x, x^*)$ . Naime, iz nejednakosti (1.1) imamo da važi  $|F(x) - F(y)| \leq \tilde{d}(x, y)$  za proizvoljne  $x, y \in X$ . Sada iz (1.21) puštajući da  $n \rightarrow \infty$  slijedi da je  $x^* = f(x^*)$ .

Tačka  $x^*$  je jedinstvena. U suprotnom bi postojala još jedna tačka  $y^* \in X$  takva da  $y^* = f(y^*)$ . Međutim, iz

$$\tilde{d}(x^*, y^*) = \tilde{d}(f(x^*), f(y^*)) \leq q \tilde{d}(x^*, y^*)$$

slijedi da je  $(1-q)\tilde{d}(x^*, y^*) \leq 0$ , što je moguće samo kada je  $\tilde{d}(x^*, y^*) = 0$ , tj.  $x^* = y^*$ .

Na kraju, puštajući da  $m \rightarrow \infty$  u (1.20) dobijamo nejednakost

$$\tilde{d}(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \tilde{d}(x_1, x_0).$$

□

KOMENTAR 1.115. Jedna od važnih poruka dokaza prethodne teoreme jeste da sa proizvoljnim izborom tačke  $x_0 \in X$  formiramo iterativni niz  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  koji konvergira ka nepokretnoj tački preslikavanja  $f : X \rightarrow X$ .

KOMENTAR 1.116. Nejednakost (1.18) daje ocjenu greške za slučaj da uzmemo da je  $x_n$  rješenje jednačine  $x = f(x)$  u  $X$  umjesto  $x^*$ .

Na sljedećem jednostavnom primjeru realno vrijednosne funkcije definisane na segmentu ilustrujemo primjenu Banahove teoreme o nepokretnoj tački.

PRIMJER 1.117. Neka je  $f(x) = \frac{e^{-x} \cos x}{2}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Prije svega, kako je  $[0, 1]$  zatvoren u  $\mathbb{R}$ , to je  $([0, 1], d)$  kompletan metrički prostor. Nije teško utvrditi da je  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ . Kako je

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \text{ za } x \in [0, 1],$$

na osnovu Lagranžove teoreme o srednjim vrijednostima imamo dodatno da je

$$|f(x) - f(y)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f'(t)| |x - y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |x - y|,$$

tj.  $f$  je kontrakcija metričkog prostora  $([0, 1], d)$  na sebe. Prema Teoremi 1.114 postoji jedinstveno rješenje jednačine  $f(x) = x$  na segmentu  $[0, 1]$ .

PRIMJER 1.118. Za afino preslikavanje  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + 1, \frac{y}{3} - \frac{x}{4} + 2)$  zapisano u matičnom obliku

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

lako se utvrđuje da je bijekcija iz  $\mathbb{R}^2$  na sebe.

Dalje, na osnovu nejednakosti (1.17) iz Primjera 1.88 imamo da je

$$\|f(x, y) - f(u, v)\| \leq C \|(x, y) - (u, v)\|,$$

gdje je  $C = \frac{\sqrt{35}}{6\sqrt{2}} = q < 1$ , tj.  $f$  je kontrakcija kompletnog metričkog prostora  $(\mathbb{R}^2, d)$  na sebe.

Konačno, na osnovu Teoreme 1.114 postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja  $f$ , tj.  $f(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$ .

Primijetimo da je fiksna tačka  $(x^*, y^*)$  preslikavanja  $f$  zapravo rješenje sistema linearnih jednačina od dvije nepoznate

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y &= -1 \\ -\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y &= -2, \end{aligned}$$

(pogledati Zadatak 21).

### 1.9. Kompaktnost.

DEFINICIJA 1.119. Neka je  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Za familiju skupova  $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ , gdje je  $I$  neki indeksni skup, kažemo da je pokrivač skupa  $A$  ako je  $A \subset \cup_{i \in I} U_i$ . Potpokrivač pokrivača  $\mathcal{U}$  skupa  $A$  je familija  $\{U_{i'} | i' \in I\} \subset \{U_i | i \in I\}$  koja je pokrivač skupa  $A$ . Otvoren pokrivač skupa  $A$  je pokrivač koji se sastoji od otvorenih skupova.

Poznato je da neprekidna realno vrijednosna funkcija na segmentu ima niz "finih" svojstava kao što su na primjer ograničenost, dostizanje minimalne (maksimalne) vrijednosti i ravnomjerna neprekidnost koje više nisu na snazi u opštem ako je domen definisanosti, na primjer, interval.

Postavlja se u tom smislu pitanje koja su to svojstva segmenta koja "prenesana" na određen domen u  $\mathbb{R}^n$  čine da neprekidne funkcije definisane na tim domenima zadržavaju gore pomenuta svojstva.

U nastavku dajemo više ekvivalentnih karakterizacija kompaktnih skupova sa fokusom na Teoremi 1.130 gdje su dati potrebni i dovoljni uslovi da neki skup u  $\mathbb{R}^n$  bude kompaktan. U teoremama, Teorema 1.133, Teorema 1.134 i Teorema 1.138 dokazano je da pomenuta "fina" svojstva neprekidnih funkcija na kompaktnim skupovima u  $\mathbb{R}^n$  su i dalje validna.

DEFINICIJA 1.120. Za skup  $K, K \subset \mathbb{R}^n$ , kažemo da je kompaktan skup u  $\mathbb{R}^n$  ako iz svakog otvorenog pokrivača skupa  $K$  može da se izdvoji konačan potpokrivač.

KOMENTAR 1.121. Otvoren pokrivač iz Definicije 1.120 odnosi se otvorene skupove prostora  $\mathbb{R}^n$ . Međutim, svojstvo kompaktnosti ne zavisi od okolnog prostora. Preciznije, otvoren pokrivač iz prethodne definicije može da se odnosi i na indukovanu topologiju na skupu  $K$ . Naime, ako je  $K$  kompaktan skup po Definiciji 1.120 i  $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$  otvoren pokrivač u indukovanoj topologiji skupa  $K$ , tada za svako  $i \in I$  postoji otvoren skup  $G_i$  u  $\mathbb{R}^n$  tako da je  $U_i = K \cap G_i$ . Prema tome, familija  $\{G_i | i \in I\}$  je otvoren pokrivač za skup  $K$  iz kog je moguće da se izdvoji konačan potpokrivač  $\{G_{i_k} | 1 \leq k \leq p\}$ . Jasno da je tada i  $\{U_{i_k} | 1 \leq k \leq p\}$  konačan otvoren potpokrivač u indukovanoj topologiji na skupu  $K$ .

Slično bismo dokazali da ako je  $K$  kompaktan skup u indukovanoj topologiji (prostora  $K$ ) da je  $K$  kompaktan i smislu Definicije 1.120. Zaista, ako je  $\{G_\alpha | \alpha \in I\}$  otvoren pokrivač skupa  $K$ , onda je  $\{K \cap G_\alpha | \alpha \in I\}$  otvoren pokrivač skupa  $K$  u indukovanoj topologiji na  $K$ , pa postoji konačan potpokrivač  $\{K \cap G_{\alpha_k} | 1 \leq k \leq m\}$  skupa  $K$ . Očigledno je da  $\{G_{\alpha_k} | 1 \leq k \leq m\}$  je konačan otvoren potpokrivač skupa  $K$ .

TEOREMA 1.122. *Skup  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  je kompaktan ako i samo ako je kompaktan u indukovanoj topologiji samog sebe.*

DOKAZ. Komentar 1.121. □

PRIMJER 1.123. Svaki konačan podskup u  $\mathbb{R}^n$  je kompaktan.

U sljedećem primjeru dokazujemo da je proizvoljan segment  $[a, b]$  kompaktan skup u standardnoj topologiji realne prave  $\mathbb{R}$  oslanjajući se na teorem o sistemu sažimajućih segmenata poznatu iz prethodnog kursa Analize 1.

PRIMJER 1.124. Neka je  $\mathcal{U}$  otvoren pokrivač segmenta  $I = [a, b]$  takav da iz njega nije moguće izdvojiti konačan potpokrivač. Za datu kolekciju intervala  $\mathcal{U}$  navedeno svojstvo segmenta  $I$  označimo sa  $\mathcal{P}$ . Dalje bar jedan od podsegmenata  $I_{11} = [a, u]$  ili  $I_{12} = [u, b]$ , gdje je  $u = \frac{a+b}{2}$  zadržava predašnje svojstvo  $\mathcal{P}$ . Naime, ukoliko bi iz otvorenog pokrivača  $\mathcal{U}$  segmenata  $I_{11}$  i  $I_{12}$  mogli da izdvojimo konačan potpokrivač za svaki od njih, onda bi unija datih potpokrivača bila konačno potpokrivanje segmenta  $I$ , što je u suprotnosti sa početnom pretpostavkom.

U nastavku, određenosti radi, pretpostavimo da segment  $I_{11}$  zadržava svojstvo  $\mathcal{P}$ . Dijeljeći segment  $I_{11}$  na dva jednaka podsegmenta  $I_{21}$  i  $I_{22}$  i ponavljajući prethodno rezonovanje bez umanjenja opštosti pretpostavimo da segment  $I_{22}$  ima svojstvo  $\mathcal{P}$ .

Nastavljajući proces dijeljenja dolazimo do niza umetnutih segmenata  $\{I_{nn}\}_{n \geq 1}$ ,  $I_{nn} \subset I_{kk}$ ,  $n > k$  sa svojstvom  $|I_{nn}| = \frac{b-a}{2^n}$ . Tada na osnovu teoreme o sažimajućim segmentima imamo da je  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{nn} = \{c_0\}$ . Budući da  $c_0 \in [a, b]$ , to postoji neki interval  $U_0 \in \mathcal{U}$  takav da  $c_0 \in U_0$ . Sa druge strane, postoji  $m \in \mathbb{N}$  tako da  $I_{mm} \subset U_0$ , tj. segment  $I_{mm}$  je pokriven samo jednim intervalom iz otvorenog pokrivača  $\mathcal{U}$ , što je suprotno njegovoj konstrukciji. Dobijena kontradikcija povlači da je segment  $I$  kompaktan skup.

PRIMJER 1.125. Ako je  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompaktan skup i  $x \in \mathbb{R}^m$ , tada je  $\{x\} \times K$  kompaktan skup u  $\mathbb{R}^{m+n}$  (provjeriti).

U Teoremi 1.126 pokazujemo da je Dekartov proizvod kompaktnih skupova takođe kompaktan skup. Prethodno dokažimo sljedeće pomoćno tvrđenje.

LEMA 1.126. Neka je  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompaktan skup i  $\mathcal{U}$  je otvoreni pokrivač skupa  $\{x\} \times K$ , gdje je  $x \in \mathbb{R}^m$ . Tada postoji otvoren skup  $U \subset \mathbb{R}^m$  koji sadrži tačku  $x$  tako da je skup  $U \times K$  pokriven konačnim brojem skupova iz  $\mathcal{U}$ .

DOKAZ. Neka je  $\mathcal{U} = \{W_i | i \in I\}$  otvoren pokrivač skupa  $\{x\} \times K$  za neki indeksni skup  $I$ . Tada za svako  $y \in K$  tačka  $(x, y)$  je pokrivena otvorenim skupom  $W_{i_0}$  iz  $\mathbb{R}^{m+n}$  za neko  $i_0 \in I$ . Dalje kako je  $W_{i_0}$  otvoren skup u  $\mathbb{R}^{m+n}$ , to postoji otvoren skup oblika  $U_{i_0} \times V_{i_0} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ , takav da  $(x, y) \in U_{i_0} \times V_{i_0} \subset W_{i_0}$ . Familija  $\{V_i | i \in I\}$  je otvoren pokrivač kompaktnog skupa  $K$ , pa tako postoji konačan potpokrivač  $\{V_{i_k} | 1 \leq k \leq p\}$  skupa  $K$ . Takođe,  $\{U_{i_k} \times V_{i_k} | 1 \leq k \leq p\}$  je konačan

potpokrivač za  $\{x\} \times K$ . Tada okolina  $U = \cap_{k=1}^p U_{i_k}$  zadovoljava tražene uslove.  $\square$

**TEOREMA 1.127.** *Ako su  $K_1 \subset \mathbb{R}^m$  i  $K_2 \subset \mathbb{R}^n$  kompaktni skupovi, onda je  $K_1 \times K_2$  kompaktnan skup u  $\mathbb{R}^{m+n}$*

**DOKAZ.** Neka je  $\mathcal{U}$  otvoren pokrivač skupa  $K_1 \times K_2$ , tada  $\mathcal{U}$  pokriva  $\{x\} \times K_2$  za svako  $x \in K_1$ . Prema Lemi 1.126 postoji otvoren skup  $U_x$ ,  $x \in U_x$ , takav da je  $U_x \times K_2$  pokriven konačnim brojem skupova iz  $\mathcal{U}$ . Kako je  $K_1$  kompaktnan skup to iz otvorenog pokrivanja  $\{U_x | x \in K_1\}$  skupa  $K_1$  moguće je izdvojiti konačan broj otvorenih skupova  $U_{x_1}, \dots, U_{x_p}$  koji pokrivaju  $K_1$ . Konačno mnogo skupova iz  $\mathcal{U}$ , prema Lemi 1.126, pokriva skup  $U_{x_i} \times K_2$ ,  $1 \leq i \leq p$ , to i unija pomenutih pokrivača je konačan otvoren potpokrivač skupa  $K_1 \times K_2$ .  $\square$

**POSLEDICA 1.128.** *Neka su  $K_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$  kompaktni skupovi za  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Tada je skup  $K_1 \times \dots \times K_m$  kompaktnan u  $\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_m}$ .*

**DOKAZ.** Dokaz slijedi iz Teoreme 1.127 indukcijom po  $m$ .  $\square$

**PRIMJER 1.129.** Iz Teoreme 1.127 i Primjera 1.124 slijedi da je skup  $I_{a,b} = \{(x_1, \dots, x_n) | a_i \leq x_i \leq b_i\}$  ( $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $a_i < b_i$ ) tzv.  **$n$ -segment**, je kompaktnan skup u  $\mathbb{R}^n$  jer  $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ .

Definicija 1.120 čini se u izvjesnom smislu nedovoljno operativnom za provjeru kompaktnosti skupova u  $\mathbb{R}^n$ . U narednoj teoremi kao što je najavljeno data je nova karakterizacija kompaktnosti skupova u prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

**TEOREMA 1.130. (Hajne-Borelova teorema)** *Skup  $K \subset \mathbb{R}^n$  je kompaktnan ako i samo ako je  $K$  zatvoren i ograničen.*

**DOKAZ.** Pretpostavimo da je  $K$  kompaktnan skup. Neka je  $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$ . Tada za svako  $x \in K$  lopte  $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$  i  $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$  su disjunktne. Familija  $\{B(x, \frac{d(x,y)}{2}) | x \in K\}$  predstavlja otvoren pokrivač skupa  $K$ . Kako je  $K$  kompaktnan skup, to postoji konačan potpokrivač  $\{B(x_i, \frac{d(x_i,y)}{2}) | 1 \leq i \leq m\}$ , skupa  $K$ . Označimo sa  $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{d(x_i,y)}{2}$ . Tada je lopta  $B(y, \delta) \subseteq B(y, \frac{d(x_i,y)}{2})$ . Kako su lopte  $B(y, \frac{d(x_i,y)}{2})$  disjunktne sa  $B(x_i, \frac{d(x_i,y)}{2})$ , to će i  $B(y, \delta)$  biti disjunktna sa svakom od lopti  $B(x_i, \frac{d(x_i,y)}{2})$ , tj.  $B(y, \delta) \cap K = \emptyset$ , odnosno  $K$  je zatvoren.

Neka je dalje  $x_0 \in K$  proizvoljna tačka. Tada familija  $\{B(x_0, k) | k \in \mathbb{N}\}$  pokriva skup  $K$ , pa postoji  $k_0 \in \mathbb{N}$  tako da  $K \subset B(x_0, k_0)$ , tj.  $K$  je ograničen.

U obratnom smjeru, pretpostavimo da je  $K$  zatvoren i ograničen skup. Tada postoji  $n$ -segment  $I_{a,b}$  takav da  $K \subset I$ . Neka je  $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$  otvoren pokrivač skupa  $K$ . Dodavanjem skupa  $\mathbb{R}^n \setminus K$ , nova familija  $\{U_\alpha | \alpha \in I\} \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\}$  predstavlja otvoren pokrivač skupa  $I_{a,b}$ , pa

se može izdvojiti konačan potpokrivač. Na kraju izbacivanjem skupa  $\mathbb{R}^n \setminus K$  (ako se on nalazi u potpokrivaču) dobijamo konačan potpokrivač skupa  $K$ , tj.  $K$  je kompaktan skup.  $\square$

PRIMJER 1.131. Iz Teoreme 1.130 slijedi da je zatvorena lopta  $\overline{B}(a, r)$  kompaktan skup za proizvoljno  $a \in \mathbb{R}^n$  poluprečnika  $r > 0$  kao i sfera  $S^{n-1}(a, r)$ .

Dokaz sljedeće teoreme ostavljamo za vježbu čitaocu.

TEOREMA 1.132. *Skup  $K \subset \mathbb{R}^n$  je kompaktan ako i samo ako svaki niz iz  $K$  ima podniz koji konvergira u  $K$ .*

U narednoj teoremi pokazujemo da je slika kompaktnog skupa pri neprekidnom preslikavanju kompaktan skup. U najkraćem rekli bismo da je kompaktnost je topološka invarijanta, tj. osobina koja se čuva pri dejstvu neprekidnih preslikavanja.

TEOREMA 1.133. *Neka je  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompaktan skup i  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  neprekidna funkcija. Tada je skup  $f(K)$  kompaktan.*

DOKAZ. Neka je  $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$  otvoren pokrivač skupa  $f(K)$  u  $\mathbb{R}^m$ . Familija  $\{f(K) \cap U_\alpha | \alpha \in I\}$  čini otvoren pokrivač skupa  $K$  u indukovanoj topologiji. Kako je funkcija  $f$  neprekidna, to su prema Teoremi 1.97 skupovi  $f^{-1}(U_\alpha \cap f(K))$  otvoreni u indukovanoj topologiji skupa  $K$ . Dalje,

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) = f^{-1}(\cup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap f(K))) = \cup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha \cap f(K)),$$

tj.  $\{f^{-1}(U_\alpha \cap f(K)) | \alpha \in I\}$  je otvoren pokrivač skupa  $K$  (u indukovanoj topologiji skupa  $K$ ). Kako je  $K$  kompaktan skup to postoji konačan potpokrivač  $\{f^{-1}(U_{\alpha_i} \cap f(K)) | 1 \leq i \leq m\}$  skupa  $K$ . Tako iz  $K \subseteq \cup_{i=1}^m f^{-1}(U_{\alpha_i} \cap f(K))$  slijedi  $f(K) \subseteq \cup_{i=1}^m (U_{\alpha_i} \cap f(K))$ , tj.  $\{U_{\alpha_i} \cap f(K) | 1 \leq i \leq m\}$  je konačan potpokrivač skupa  $f(K)$ . Dakle,  $f(K)$  je kompaktan skup.  $\square$

TEOREMA 1.134. *Ako je  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompaktan skup i  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidno preslikavanje, tada funkcija  $f$  dostiže maksimalnu i minimalnu vrijednost na skupu  $K$ .*

DOKAZ. Potrebno je pokazati da postoje tačke  $x, y \in K$  takve da

$$f(x) = \sup_{z \in K} f(z) = \max_{z \in K} f(z) \text{ i } f(y) = \inf_{z \in K} f(z) = \min_{z \in K} f(z).$$

Neka je  $\tilde{K} = f(K)$ . Skup  $\tilde{K}$  je kompaktan na osnovu Teoreme 1.133. Označimo sa  $a = \inf \tilde{K}$  i  $b = \sup \tilde{K}$ . Kako je  $\tilde{K}$  ograničen skup, to je jasno da  $-\infty < a \leq b < \infty$ . Dalje, kako su  $a$  i  $b$  tačke nagomilavanja skupa  $\tilde{K}$ , to zbog zatvorenosti skupa  $\tilde{K}$ ,  $a \in \tilde{K}$  i  $b \in \tilde{K}$ , pa postoje tačke  $x \in K$  i  $y \in K$  tako da  $a = f(y)$  i  $b = f(x)$ .  $\square$

U narednoj teoremi dokazujemo da su proizvoljne dvije norme definisane na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru  $X$  ravnomjerno ekvivalentne što za posljedicu ima da u problemima vezanim za konvergenciju u  $X$  možemo birati pogodniju normu.

**TEOREMA 1.135.** *Svake dvije norme na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru su ravnomjerno ekvivalentne.*

**DOKAZ.** Neka je  $\dim(X) = n$  i  $\{e_1, \dots, e_n\}$  baza prostora  $X$ . Za proizvoljni vektor  $x \in X$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  definišemo normu  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ . Tada su normirani prostori  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  i  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  izometrični  $((x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i e_i)$ . Neka su dalje  $\|\cdot\|_1$  i  $\|\cdot\|_2$  norme definisane na  $X$ .

Dokažimo da je preslikavanje  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|x\|_1$  neprekidno u odnosu na normu  $\|\cdot\|_\infty$ . Kako je

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_1 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \sum_{i=1}^n \|e_i\|_1 = C \|x\|_\infty,$$

to prema (1.4) imamo

$$|f(x) - f(x_0)| = |\|x\|_1 - \|x_0\|_1| \leq \|x - x_0\|_1 \leq C \|x - x_0\|_\infty,$$

tj.  $f$  je neprekidna u odnosu na  $\|\cdot\|_\infty$ . Dalje, jedinična sfera u  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  je kompaktan skup (zbog izometrije sa  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ), pa prema Teoremi 1.134 postoje pozitivne konstante  $C_1$  i  $C_2$  takve da

$$C_1 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_\infty = 1.$$

Konstante  $C_1$  i  $C_2$  su pozitivne jer je  $x \neq 0$  kad god je  $\|x\|_\infty = 1$ .

Dakle, za proizvoljno  $x \in X \setminus \{0\}$  važi

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_1 \leq C_2$$

odnosno

$$C_1 \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_\infty, x \in X.$$

Analogno bismo dokazali da za neke pozitivne konstante  $C'_1$  i  $C'_2$  važi

$$C'_1 \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq C'_2 \|x\|_\infty, x \in X,$$

odakle dobijamo

$$\frac{C_1}{C'_2} \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \frac{C_2}{C'_1} \|x\|_\infty, x \in X.$$

□

**PRIMJER 1.136.** U ovom primjeru pokazujemo neprekidnost linearnog preslikavanja  $A : X \rightarrow Y$ , gdje je su  $X$  i  $Y$  normirani prostori, a  $X$  je konačno dimenzionalni vektorski prostor. Polazeći od definicije norme linearnog preslikavanja (1.5),

$$(1.22) \quad \|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|$$

i posljedične nejednakosti  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ ,  $x \in X$ , dovoljno je pokazati da je  $\|A\|$  ograničeno.

Sa druge strane, kako je  $X$  konačno dimenzionalan vektorski prostor, recimo  $\dim(X) = n$ , to postoji baza vektorskog prostora koju ćemo da označimo sa  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Tada prema Teoremi 1.135 postoje konstante  $c_0, c_1 > 0$  takva da je  $c_0\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_1\|x\|_\infty$ .

Označavajući sa  $C = \max_{1 \leq i \leq n} \|Ae_i\|_\infty$  dobijamo

$$\|A\| \leq \frac{c_1\|Ax\|_\infty}{c_0\|x\|_\infty} = \frac{c_1C\|x\|_\infty}{c_0\|x\|_\infty} = \frac{c_1C}{c_0}.$$

**PRIMJER 1.137.** Neka je  $B : X \times Y \rightarrow Z$  bilinearano preslikavanje, pri čemu su  $X, Y$  i  $Z$  normirani konačno dimenzionalni vektorski prostori. Pretpostavimo da  $\dim(X) = n$ ,  $\dim(Y) = m$ . Pokažimo da je  $B$  neprekidno preslikavanje. Na početku pokazaćemo da je norma bilinearnog preslikavanja  $B$  ograničena. Prema (1.7) imamo da je  $\|B\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|B(x, y)\|$ . Ako sa  $\{e_1, \dots, e_n\}$  i  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$  označimo ortonormirane baze prostora  $X$  i  $Y$  respektivno onda za  $x \in X$  i  $y \in Y$  imamo odgovarajuće prezentacije,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$  i kako je  $\|x\| = 1$ ,  $\|y\| = 1$  to prema Teoremi 1.135 imamo

$$\begin{aligned} \|B(x, y)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j B(e_i, e_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x_i| |y_j| \|B(e_i, e_j)\| \\ (1.23) \quad &\leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|B(e_i, e_j)\| \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|B(e_i, e_j)\| \end{aligned}$$

tj.  $\|B\| \leq C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|B(e_i, e_j)\|$ .

Neka je dalje  $(x, y) \in X \times Y$  i  $(h, k) \in X \times Y$ , tada

$$B(x + h, y + k) - B(x, y) = B(h, y) + B(x, k) + B(h, k),$$

odnosno

$$\begin{aligned} &\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \|B(x + h, y + k) - B(x, y)\| \\ &\leq \|B\| \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (\|h\|\|y\| + \|x\|\|k\| + \|h\|\|k\|) = 0, \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je  $B$  neprekidno bilinearano preslikavanje na  $X \times Y$ .

Zaključujemo ovo poglavlje uopštenjem na početku pomenute teoreme o svojstvu ravnomjerne neprekidnosti neprekidnih funkcija na segmentu.

**TEOREMA 1.138.** *Neka je  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompaktan skup i  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  neprekidna funkcija. Tada je funkcija  $f$  ravnomjerno neprekidna na  $K$ .*

**DOKAZ.** Polazeći od neprekidnosti funkcije  $f$  zaključujemo da za proizvoljno  $\epsilon > 0$  za svako  $x \in K$  postoji  $\delta(x, \epsilon) > 0$  tako da

$$d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} \text{ kad god je } d(x, y) < \delta(x, \epsilon).$$

Familija  $\{B(x, \frac{\delta(x, \epsilon)}{2}) | x \in K\}$  je otvoren pokrivač skupa  $K$ , pa zbog pretpostavljene kompaktnosti može se izdvojiti konačan potpokrivač  $\{B(x_i, \frac{\delta(x_i, \epsilon)}{2}) | 1 \leq i \leq m\}$  skupa  $K$ . Neka je sada  $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{\delta(x_i, \epsilon)}{2} > 0$ . Za  $x, y \in K$  i  $d(x, y) < \delta$  postoji lopta  $B(x_{i_0}, \frac{\delta(x_{i_0}, \epsilon)}{2})$  (za neko  $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ ) koja sadrži  $x$ . Sa druge strane,  $d(x_{i_0}, y) \leq d(x_{i_0}, x) + d(x, y) < \delta(x_{i_0}, \epsilon)$ , pa  $y \in B(x_{i_0}, \delta(x_{i_0}, \epsilon))$  i zato je  $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_{i_0})) + d(f(x_{i_0}), f(y)) < \epsilon$ .  $\square$

### 1.10. Povezanost.

**DEFINICIJA 1.139.** Za skup  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  kažemo da je povezan ako ne može da se predstavi kao unija dva disjunktne neprazna otvorena skupa u indukovanj topologiji skupa  $C$ , tj. skup  $C$  se ne može predstaviti na način

$$C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

gdje  $A, B$  su otvoreni skupovi u  $\mathbb{R}^n$ , takvi da  $A \cap B = \emptyset$  i  $A \cap C \neq \emptyset$ ,  $B \cap C \neq \emptyset$ .

**KOMENTAR 1.140.** Opštija varijanta Definicije 1.139 odnosi se na topološki prostor  $(X, \tau)$ . Preciznije, topološki prostor  $X$  je povezan ako ne može da se predstavi kao unija dva neprazna disjunktne otvorena skupa u  $X$ , tj.  $X = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \neq \emptyset$  i  $B \neq \emptyset$ . Slično, ako je  $C \subset X$ , onda je skup  $C$  povezan ako je povezan u odnosu na indukovanu topologiju iz  $X$ .

Prije nego počnemo sa navođenjem primjera povezanih i nepovezanih skupova navešćemo jednu osobinu povezanih skupova koja direktno slijedi iz Definicije 1.139.

**PROPOZICIJA 1.141.** *Neka je  $C$  povezan skup u  $\mathbb{R}^n$  i  $A$  je podskup skupa  $C$  koji je istovremeno otvoren i zatvoren skup u  $C$ . Tada je  $A = \emptyset$  ili je  $A = C$ .*

**DOKAZ.** Kako je  $C = A \cup (C \setminus A)$  predstavljen kao unija dva otvorena skupa u  $C$ , to zbog pretpostavljene povezanosti skupa  $C$  imamo da je  $A = \emptyset$  ili  $A = C$ .  $\square$

**PRIMJER 1.142.** Skup  $(a, b) \cup (b, d)$  je primjer nepovezanog skupa u  $\mathbb{R}$ , gdje  $a, b, d \in \mathbb{R}$  pri čemu ne isključujemo i mogućnost da je  $a = -\infty$  ili  $d = \infty$ .

PRIMJER 1.143. Ako je  $A = \{(x, y, z) | 1 < (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 < 2\}$ , tada je skup graničnih tačaka  $\partial A = S_1 \cup S_2$ , gdje  $S_1 = \{(x, y, z) | (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2\}$ ,  $S_2 = \{(x, y, z) | (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2\}$  i jasno  $\partial A$  je nepovezan skup.

PRIMJER 1.144. Ako je  $X \neq \emptyset$ , i  $(X, \tilde{d})$  metrički prostor sa diskretnom metrikom, onda je svaki podskup skupa  $X$  nepovezan što slijedi iz činjenice da za svaku tačku  $x \in X$  skup  $\{x\}$  je sam za sebe otvoren i istovremeno zatvoren skup.

PRIMJER 1.145. Jednočlan skup  $\{x\}$  je povezan za proizvoljno  $x \in \mathbb{R}^n$ .

PRIMJER 1.146. (**Segment  $[a, b]$  je povezan skup**) Segmenti  $[a, b]$  realne prave  $\mathbb{R}$  su povezani skupovi. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je  $[a, b] = A \cup B$ , gdje su  $A$  i  $B$  neprazni, otvoreni i disjunktni skupovi u  $[a, b]$ . Neka je  $b \in B$ . Tada, budući otvoren u  $[a, b]$ , skup  $B$  zadrži i neku okolinu tačke  $b$  u  $[a, b]$ , što povlači da je  $\sup(A) = c < b$ . Napomenimo da supremum skupa  $A$  postoji jer je  $A$  ograničen skup. Dalje, tačka  $c$  pripada jednom od skupova  $A$  ili  $B$  što znači da neka okolina  $(c - \epsilon, c + \epsilon)$  tačke  $c$  pripada skupu  $A$  ili  $B$ . Međutim, kako je  $c$  supremum, dakle i tačka nagomilavanja skupa  $A$ , to  $A \cap (c - \epsilon, c) \neq \emptyset$  i  $(c, c + \epsilon) \cap B \neq \emptyset$ . Kontradikcija. Time je dokazano da su svi segmenti  $[a, b]$  realne prave povezani skupovi. Slično se pokazuje da su dodatno i svi polusegmenti  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  i intervali  $(a, b)$  takođe povezani skupovi u  $\mathbb{R}$ .

PRIMJER 1.147. Prethodni primjer povlači da je i  $\mathbb{R}$  takođe povezan skup. Zaista, pretpostavimo da je  $\mathbb{R}$  nepovezan skup, tj.  $\mathbb{R} = A \cup B$ , gdje su  $A, B$  neprazni, disjunktni otvoreni skupovi. Tada iz  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} [-n, n]$  slijedi da postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  tako da  $[-n_0, n_0] \cap A \neq \emptyset$  i  $[-n_0, n_0] \cap B \neq \emptyset$  odnosno  $[-n_0, n_0] = ([-n_0, n_0] \cap A) \cup ([-n_0, n_0] \cap B)$ , što je kontradikcija. Slično, i neograničeni polusegmenti  $(-\infty, b]$  i  $[a, \infty)$  su primjeri povezanih skupova u  $\mathbb{R}$ .

PRIMJER 1.148. ( **$n$ -segment  $I_{a,b}$  je povezan skup**) Ukoliko pretpostavimo da je  $n$ -segment  $I_{a,b}$  nepovezan skup, tj.  $I_{a,b} = A \cup B$ , gdje su  $A, B$  neprazni, disjunktni i otvoreni skupovi u  $I_{a,b}$ , onda koristeći da su projekcije  $p^i : I_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  neprekidna i otvorena preslikavanja imamo da je segment  $[a_i, b_i] = p^i(A) \cup p^i(B)$  nepovezan skup. Kontradikcija. Dakle,  $n$ -segment  $I_{a,b}$  je povezan skup što za posljedicu ima i da je  $\mathbb{R}^n$  povezan skup.

Naredna propozicija daje karakterizaciju povezanih skupova u  $\mathbb{R}$ .

PROPOZICIJA 1.149. *Skup  $A \subset \mathbb{R}$  je povezan ako i samo ako je  $A$  interval (zatvoren, otvoren ili poluotvoren).*

DOKAZ. Neka je  $A$  neprazan povezan skup u  $\mathbb{R}$  i  $\alpha = \inf A$  i  $\beta = \sup A$ . Dokažimo da  $a \in A$  za svako  $a \in (\alpha, \beta)$ . Pretpostavimo

suprotno, tj. da  $a \notin A$ . Skupovi  $A \cap (-\infty, a)$  i  $A \cap (a, \infty)$  su neprazni disjunktni i otvoreni skupovi u  $A$  i njihova unija je skup  $A$ , što je kontradikcija. Obratno tvrđenje je dokazano kroz primjere, Primjer 1.146 i Primjer 1.147.  $\square$

Kao što smo već vidjeli u Primjeru 1.142 unija dva povezana skupa ne mora da bude povezan skup. U sljedećoj propoziciji dajemo dovoljan uslov pod kojim je unija povezanih skupova povezan skup.

**PROPOZICIJA 1.150.** *Ako su  $A_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in I$  povezani skupovi, pri čemu je  $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$ , onda je  $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$  povezan skup.*

**DOKAZ.** Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup  $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$  nepovezan. Tada postoje otvoreni disjunktni i neprazni skupovi  $U$  i  $V$  takvi da  $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha = U \cup V$ , pri čemu je  $(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap U \neq \emptyset$  i  $(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ . Posljednje relacije povlače da  $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \cap U \neq \emptyset$  ili  $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \cap V \neq \emptyset$ . Pretpostavimo bez umanjavanja opštosti da  $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \cap U \neq \emptyset$ , što dalje povlači  $A_\alpha \cap U \neq \emptyset$  za svaki indeks  $\alpha \in I$ . Međutim, tada imamo da je  $A_\alpha = (A_\alpha \cap U) \cup (A_\alpha \cap V)$ ,  $\alpha \in I$ , što budući da je  $A_\alpha$  povezan skup je moguće samo za slučaj da je  $A_\alpha \subseteq U$ ,  $\alpha \in I$ . Posljedično  $V = \emptyset$  što je kontradikcija, tj. početna pretpostavka nije tačna.  $\square$

Naredna teorema je analog Teoreme 1.133 samo sada za povezane skupove, tj. pokazujemo da je svojstvo povezanosti topološka invarijanta.

**TEOREMA 1.151.** *Neka je  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  neprekidna funkcija i  $A$  je povezan skup. Tada je skup  $f(A)$  povezan u  $\mathbb{R}^m$ .*

**DOKAZ.** Pretpostavimo da skup  $f(A)$  nije povezan. Tada postoje neprazni otvoreni disjunktni skupovi  $V_1$  i  $V_2$  u  $\mathbb{R}^m$  takvi da  $f(A) \subseteq V_1 \cup V_2$  i  $f(A) \cap V_1 \neq \emptyset$  i  $f(A) \cap V_2 \neq \emptyset$ .

U nastavku primijetimo da ako  $x \in A$ , onda  $f(x) \in V_1$  ili  $f(x) \in V_2$ , što povlači da  $A \subseteq f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$ . Sa druge strane, skupovi  $U_1 = A \cap f^{-1}(V_1)$  i  $U_2 = A \cap f^{-1}(V_2)$  su otvoreni u  $A$  zbog pretpostavljene neprekidnosti funkcije  $f$ . Takođe, skupovi  $U_1$  i  $U_2$  su disjunktni jer  $U_1 \cap U_2 \subseteq f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset$ . Dalje, jasno da  $A \subseteq U_1 \cup U_2$ . Ako bi  $A \cap U_1 = \emptyset$ , onda  $A \subseteq U_2$ , što dalje povlači da je  $f(A) \subseteq f(A \cap f^{-1}(V_2)) \subseteq f(A) \cap V_2$ . Posljednja inkluzija protvriječi početnoj pretpostavci da je  $f(A) \cap V_1 \neq \emptyset$  i  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Dakle,  $A \cap U_1 \neq \emptyset$ . Slično, pokazujemo da je  $A \cap U_2 \neq \emptyset$ . Prema tome, zaključujemo da skup  $A$  nije povezan. Kontradikcija.  $\square$

**PRIMJER 1.152.** Podsjetimo se da za  $a, b \in \mathbb{R}^n$  segment  $[a, b]$  u  $\mathbb{R}^n$  je definisan na način

$$[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Funkcija  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi(\lambda) = \lambda a + (1 - \lambda)b$  je neprekidna što lako slijedi iz nejednakosti

$$\|\psi(s) - \psi(t)\| \leq \|a\||s - t| + \|b\||s - t|.$$

Dakle, segment  $[a, b] = \psi([0, 1])$  je povezan skup kao slika segmenta  $[0, 1]$  preslikavanjem  $\psi$ .

**DEFINICIJA 1.153. (Putevima povezan skup)** Za skup  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  kažemo da je putevima povezan ako za svake dvije tačke  $x, y \in C$  postoji neprekidno preslikavanje (put)  $\varphi : [0, 1] \rightarrow C$  tako da  $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$ .

**DEFINICIJA 1.154. (Linijski povezan skup)** Za skup  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  kažemo da je linijski povezan ako za svake dvije tačke  $x, y \in A$  postoji poligonalna linija koja spaja tačke  $x$  i  $y$ .

**KOMENTAR 1.155.** Pod poligonalnom linijom koja spaja tačke  $x$  i  $y$  u  $A$  podrazumijevamo niz segmenata  $[x_{k-1}, x_k] \subset C, k \in \{0, 1, \dots, m\}$ , gdje  $x_0 = x$  i  $x_m = y$ .

**KOMENTAR 1.156.** Ako je skup linijski povezan onda je i putevima povezan.

**PRIMJER 1.157.** Jedinična kružnica  $S^1$  je putevima povezan skup. Na primjer, ako su  $A, B \in S^1$  (slika), tada polazeći od parametrizacije jedinične kružnice  $S^1 = \{(\cos(t), \sin(t)) | t \in [0, 2\pi)\}$  i određujući tačke  $A$  i  $B$  na način da ugao koji odgovara tački  $A$  je  $\alpha$  i  $\beta$  je ugao koji odgovara tački  $B$ ,  $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$ . Odgovarajući put  $\varphi : [0, 1] \rightarrow S^1$  koji spaja tačke  $A$  i  $B$  dat je sa  $\varphi(t) = (\cos(t\beta + (1-t)\alpha), \sin(t\beta + (1-t)\alpha))$ . Sa druge strane,  $S^1$  nije linijski povezan skup.

Prirodno se nameće pitanje kakav je odnos između povezanosti i povezanosti putevima. Naredna teorema daje djelimičan odgovor.

**TEOREMA 1.158.** *Ako je skup  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  putevima povezan, onda je i povezan.*

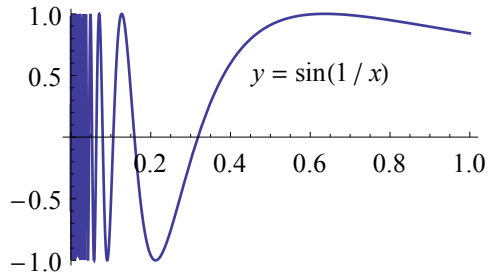
**DOKAZ.** Pretpostavimo da je  $C$  povezan putevima, a da nije povezan skup. Tada postoje neprazni otvoreni skupovi  $A$  i  $B$  u skupu  $C$  takvi da je  $C = A \cup B$ . Neka su sada  $x \in A$  i  $y \in B$ . Po pretpostavci postoji put  $\varphi : [0, 1] \rightarrow C$  tako da  $\varphi(0) = x$  i  $\varphi(1) = y$ . Grafik funkcije  $\varphi$ , u oznaci  $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) | 0 \leq x \leq 1\}$ , je povezan skup kao slika segmenta  $[0, 1]$  neprekidnim preslikavanjem  $\psi(x) = (x, \varphi(x))$ . Međutim,

$$\Gamma_\varphi = (A \cap \Gamma_\varphi) \cup (B \cap \Gamma_\varphi),$$

gdje su  $A \cap \Gamma_\varphi$  i  $B \cap \Gamma_\varphi$  otvoreni, neprazni i disjunktni skupovi u indukovanoj topologiji na  $\Gamma_\varphi$ , tj.  $\Gamma_\varphi$  je nepovezan skup. Kontradikcija.  $\square$

**PRIMJER 1.159.** Obrnuto tvrđenje u Teoremi 1.158 nije tačno u opštem. Kao odgovarajući primjer navodimo skup  $C = A \cup B$ , gdje je  $A = \{(x, 0) | x \leq 0\}$  i  $B = \{(x, \sin \frac{1}{x}) | x > 0\}$ . Skup  $C$  je povezan. U suprotnom,  $C = (H \cap C) \cup (K \cap C)$ , gdje su  $H$  i  $K$  neprazni, disjunktni i otvoreni skupovi u  $\mathbb{R}^2$ . Kako je  $A$  povezan on ne može da siječe  $H$  i

$K$  istovremeno, već je sadržan u jednom od njih, na primjer u  $H$ . Isti argument se može primijeniti na  $B$  i zaključiti da onda  $B \subset K$ . Sa druge strane, imamo da je  $(0, 0) \in H$  i zato postoji  $\epsilon > 0$  tako da  $B(0, \epsilon) \subset H$ . Tačka  $(0, 0)$  je tačka nagomilavnja za skup  $B$ , pa  $B(0, \epsilon) \cap B \neq \emptyset$ , tj.  $H \cap K \neq \emptyset$ , a to je kontradikcija. Međutim,  $C$  nije putevima povezan. Na primjer ako je proizvoljnu tačku iz  $A$  i proizvoljnu tačku iz  $B$  moguće spojiti putem, onda bi to značilo da postoji  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ , što nije tačno.



PRIMJER 1.160. Otvorena jedinična lopta  $B(0, 1)$  je putevima povezan skup. Zaista, pretpostavimo da su  $x, y \in B(0, 1)$ . Tada put koji spaja tačke  $x$  i  $y$  dat je sa  $\psi(t) = ty + (1 - t)x$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Da je preslikavanje  $\psi$  neprekidno dokazali smo u Primjeru 1.152, a da važi  $\psi([0, 1]) \subset B(0, 1)$  slijedi jednostavno koristeći nejednakost trougla za euklidsku normu

$$\|\psi(t)\| \leq (1 - t)\|x\| + t\|y\| < 1 - t + t = 1.$$

PRIMJER 1.161. Iz prethodnog primjera direktno slijedi da je svaki konveksan skup u  $\mathbb{R}^n$  putevima povezan.

PRIMJER 1.162. Jedinična sfera  $S^{n-1}$  u  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ) je putevima povezan skup.

PRIMJER 1.163. Loptu  $B(a, r)$  u  $\mathbb{R}^3$  možemo da posmatramo kao sliku jedinične lopte preslikavanjem  $f(x) = a + rx$ . Preciznije,  $B(a, r) = f(B(0, 1))$ , gdje je  $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1 + rx_1, a_2 + rx_2, a_3 + rx_3)$ . Kako je  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  neprekidno preslikavanje to je i  $B(a, r)$  povezan skup na osnovu Teoreme 1.151.

PRIMJER 1.164. Neka je  $E = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$ . Geometrijski je jasno da svake dvije tačke iz  $E$  možemo da povežemo segmentom u  $E$ , te da je skup putevima povezan. U ovom primjeru, pokažimo da je skup  $E$  povezan koristeći Teoremu 1.151.

Uzimajući u obzir preslikavanje  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definisano sa  $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$  koje je očigledno neprekidno, nije teško provjeriti da je  $f(B(0, 1)) = E$ , pa na osnovu Teoreme 1.151 skup  $E$  je povezan.

DEFINICIJA 1.165. (**Oblast**) Skup  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  koji je otvoren i povezan naziva se oblast.

Naredna teorema daje odgovor na pitanje koji dodatni uslov treba da zadovoljava povezan skup da bi bio putevima povezan.

**TEOREMA 1.166.** *Neprazan i otvoren skup  $\Omega$  u  $\mathbb{R}^n$  je povezan ako i samo ako se svake dvije njegove tačke mogu povezati poligonalnom linijom.*

**DOKAZ.** Ukoliko je  $\Omega$  linijski povezan, onda je  $\Omega$  i putevima povezan, pa prema tome i povezan. Obratno, ako je  $\Omega$  otvoren i povezan neka je  $x_0 \in \Omega$  i  $A = \{x \in \Omega \mid x \text{ je moguće spojiti poligonalnom linijom sa } x_0\}$ . Kako  $x_0 \in A$ , to  $A \neq \emptyset$ . Budući da je  $\Omega$  otvoren skup, to za svako  $x \in A$  postoji  $r_x > 0$  i lopta  $B(x, r_x) \subset \Omega$ . Dalje je jasno da  $B(x, r_x) \subset A$  jer svaku tačku  $y \in B(x, r_x)$  moguće je spojiti segmentom  $[x, y]$  sa tačkom  $x$  i posle poligonalnom linijom opet sa  $x_0$ . Dakle,  $A$  je otvoren skup. Sa druge strane, skup  $B = \Omega \setminus A$  možemo da okarakterišemo kao skup svih tačaka iz  $\Omega$  koje nije moguće poligonalnom linijom spojiti sa  $x_0$ . Skup  $B$  je takođe otvoren. Naime, za  $z \in B$  postoji  $r_z > 0$  tako da  $B(z, r_z) \subset \Omega$ . Svaka tačka  $\tilde{z} \in B(z, r_z)$  pripada  $B$ . U protivnom tačku  $\tilde{z}$  bi mogli da povežemo sa  $x_0$  poligonalnom linijom i segmentom  $[\tilde{z}, z]$  sa tačkom  $z$ , što je nemoguće. U konačnom zaključujemo da je  $A$  istovremeno zatvoren i otvoren skup u  $\Omega$ , što na osnovu Propozicije 1.141 povlači da je  $A = \Omega$ .  $\square$

**1.11. Komponente povezanosti.** Neka je  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ukoliko skup  $A$  nije povezan za pretpostaviti je da se skup  $A$  sastoji od povezanih disjunktih podskupova. U cilju da dokažemo prethodnu pretpostavku definisaćemo na skupu  $A$  relaciju  $\sim$ . Za tačke  $a, b \in A$  kažemo da su u relaciji  $\sim$ ,  $a \sim b$ , ako postoji povezan podskup u  $A$  koji ih sadrži. Nije teško utvrditi da je  $\sim$  relacije ekvivalencije na skupu  $A$ . Naime, za svaku tačku  $x \in A$  važi  $x \sim x$  jer je  $\{x\}$  povezan skup. Simetričnost relacije  $\sim$ ,  $x \sim y$  ako i samo ako je  $y \sim x$ , je očigledna. Dalje, ako je  $x \sim y$  i  $y \sim z$ , to postoje povezani podskupovi od  $A$ , recimo  $A_y$  i  $A_z$ , takvi da  $x, y \in A_y$  i  $y, z \in A_z$ . Kako je  $A_y \cap A_z \neq \emptyset$ , to na osnovu Propozicije 1.150  $A_y \cup A_z$  je povezan skup i  $x, z \in A_y \cup A_z$ , tj.  $x \sim z$ . Klase ekvivalencije relacije  $\sim$  na  $A$  nazivaju se komponentama povezanosti skupa  $A$ . Tako za proizvoljno  $x \in A$  komponenta povezanosti  $C_x$  koja sadrži  $x$  predstavlja najveći povezan podskup u  $A$  koji sadrži  $x$ .

### Zadaci

1. Ako je  $(X, \tilde{d})$  metrički prostor, pokazati da je  $(X, \tilde{d})$  takođe metrički prostor, gdje je  $\tilde{d}_1(x, y) = \frac{\tilde{d}(x, y)}{1 + \tilde{d}(x, y)}$ ,  $x, y \in X$  i da je svaki podskup u  $X$  ograničen u novoj metrici.
2. Neka je  $B([a, b])$  skup svih ograničenih funkcija na segmentu  $[a, b]$ . Dokazati da je  $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ ,  $f \in B([a, b])$  norma na  $B([a, b])$  i  $(B([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  normiran prostor. Da li je  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$  norma na  $B([a, b])$ ?
3. Ispitati da li je sa:
  - a)  $\tilde{d}(x, y) = \arctan |x - y|$ ;

- b)  $\tilde{d}(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ ;  
 c)  $\tilde{d}(x, y) = \sin^2 |x - y|$ , zadata metrika na  $\mathbb{R}$ .  
 4. Neka je  $(X, \tilde{d})$  metrički prostor i  $A \subset X$ . Dokazati da je  $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$ .  
 5. Dokazati da je skup ograničenih linearnih preslikavanja  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  normiran prostor.  
 6. Ocijeniti normu linearnog preslikavanja  $\Lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\Lambda(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, 3x_2, 3x_1)$$

uzimajući u obzir:

- a) euklidsku normu  $\|\cdot\|$  na  $\mathbb{R}^3$ ,  
 b) normu  $\|\cdot\|_1$  na  $\mathbb{R}^3$ ,  
 c) normu  $\|\cdot\|_\infty$  na  $\mathbb{R}^3$ .  
 7. Neka je  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ograničeno linearno preslikavanje. Pokazati da je sa  $B(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  definisano ograničeno bilinearno preslikavanje i da je  $\|B\| \leq \|A\|$ .  
 8. Neka su  $x, y \in \mathbb{R}^3$  i  $B(x, y) = x \times y$  (vektorski proizvod). Dokazati da je  $B$  bilinearno preslikavanje i odrediti mu normu.  
 9. Neka su  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , dokazati da je:  
 a)  $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ ;  
 b)  $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ;  
 c)  $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .  
 10. Neka je  $f \in C([a, b])$ . Dokazati da je grafik funkcije  $f$ ,  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | a \leq x \leq b\}$ , zatvoren skup u euklidskoj ravni.  
 11. Dokazati da su skupovi  $A = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = \frac{x^2}{x^2+1}\}$  i  $B = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = 1\}$  disjunktni zatvoreni skupovi i da je  $d(A, B) = 0$ .  
 12. Dokazati Teoremu 1.59.  
 13. Dokazati Teoremu 1.62.  
 17. Neka su  $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ . Tada:  
 a) ako je  $f(x) = g(x)$ ,  $x \in Q^n$  pokazati da je  $f(x) = g(x)$  za svako  $x \in \mathbb{R}^n$ .  
 b) dokazati da je skup  $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = g(x)\}$  zatvoren.  
 18. Odrediti  $A^0$ ,  $\text{Ext}(A)$  i  $\partial A$ , ako je:  
 a)  $A = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$ ;  
 b)  $A = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| = 1\}$ ;  
 c)  $A = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \text{ je racionalan}\}$ ;  
 19. Neka je  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  neprekidno preslikavanje. Pokazati da ako je  $A \subset \mathbb{R}^n$ , onda važi  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .  
 20. Ispitati neprekidnost funkcije na  $A = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \tan(x^2 + y^2) \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \in A \setminus (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Odrediti  $f(A)$ .

21. Dokazati Teoremu 1.15.

22. Koristeći Banahov princip kontrakcije dokazati da sljedeći sistem ima jedinstveno rješenje. Formirati iterativni niz koji aproksimira rješenje sistema

$$1.1x_1 + 0.22x_2 - 0.03x_3 = 0.5$$

$$0.8x_2 + 0.25x_3 = 1$$

$$0.11x_1 + 0.19x_2 + 0.9x_3 = 2.$$

23. Koristeći Banahov princip kontrakcije pokazati da jednačina  $e^{-x} - x + 1 = 0$  ima rješenje na  $\mathbb{R}$ . Odrediti približno rješenje sa greškom  $10^{-2}$ .

24. Ako je  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{R}^n}$  opadajuća familija kompaktnih skupova u  $\mathbb{R}^n$  ( $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \cdots$ ), dokazati da  $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$  nije prazan.

25. Dokazati da je skup  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompaktan ako i samo ako svaki niza tačaka  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  iz  $K$  ima podniz koji konvergira ka nekoj tački  $x \in K$ .

26. Ako su  $F, K \subset \mathbb{R}^n$ , takvi da je  $F$ —zatvoren, a  $K$ —kompaktan skup i  $F \cap K = \emptyset$ , dokazati da je tada  $d(F, K) > 0$ . Pokazati da tvrdjenje nije tačno ako se izostavi uslov da je  $K$  kompaktan.

27. Ako su  $K_1$  i  $K_2$  kompaktni disjunktne skupovi u  $\mathbb{R}^n$  dokazati da postoje otvoreni disjunktne skupovi  $G$  i  $H$  u  $\mathbb{R}^n$  takvi da  $K_1 \subset G$  i  $K_2 \subset H$ .

28. Pokazati da ako je  $K \subset \mathbb{R}^n$  ograničen skup, onda za svaki niz  $\{x_k\}_{k \geq 1} \subset K$  postoji podniz koji konvergira ka nekoj tački iz  $\overline{K}$ .

29. Da li presjek povezanih skupova u  $\mathbb{R}^3$  mora da bude povezan skup? Da li slika nepovezanog skupa pri neprekidnom preslikavanju mora da bude nepovezan skup?

30. Dokazati da je  $S^2$  putevima povezan skup.

31. U terminima otvoren, zatvoren povezan, putevima povezan, kompletan, kompaktan opisati sljedeće skupove:

a)  $A = \{(x, y) | x^2 - y^2 \geq 4\};$

b)  $A = \{(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \frac{\log(1+n)}{n}, 1 + e^{-n^2}) | n \in \mathbb{N}\};$

c)  $A = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < 4, x + y + z > 1\}.$

32. Pokazati da ne postoji homeomorfizam između  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .

33. Odrediti komponente povezanosti sa sljedeće skupove:

a)  $\partial A$  ako je  $A = \{x \in \mathbb{R}^n | 1 < \|x\| < 2\};$

b) skup racionalnih brojeva  $Q$  u  $\mathbb{R}$ .

34. Pokazati da je skup  $B = \{(x, \sin \frac{1}{x}) | x > 0\}$  putevima povezan, ali da  $\overline{B}$  nije putevima povezan.

## Bibliography

- [1] M. JEVTIĆ, M. MATELJEVIĆ, I. JOVANOVIĆ, *Matematička analiza II*. Matematički fakultet, Beograd, 2008
- [2] M. DOSTANIĆ, *Matematička analiza 1*. Proc. London Math. Soc. 76 (1998), 667-684.